Math P. 516d
Schulz

KÖNIGLICH BAIERISHE HOF-
UND CENTRAL-BIBLIOTHEK.

1E

<36622863900015 S

<36622863900015

Bayer. Staatsbibliothek

P. Michael Schmid Cap. Nicolerallach 1799.

Versuch
einer
genauen
Theorie des Unendlichen.

Erster Theil.

Vom Unendlichgroßen, und der Meßkunst desselben,

von
Johann Schultz,
Königl. Preuß. Hofprediger und Professor der Mathematik.

Mit zwey Kupfertafeln.

Königsberg und Leipzig,
bei Gottl. Lebrecht Hartung,
Königl. Preuß. Hofbuchdrucker und Buchhändler.
1788.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

So sehr wir uns auch gezwungen fühlen, das Unendliche einen Abgrund zu nennen, in welchem sich unsere Gedanken verliehren; so ist dieses dennoch in Ansehung des Mathematisch-Unendlichen nicht ganz uneingeschränkt richtig. Auch dieses hat man zwar zu allen Zeiten als was Unzugängliches angesehen, und es entweder gar für ein leeres Hirngespinst, das der gründliche Denker fliehen müsse, oder doch wenigstens für so was

 gehal-

gehalten, das keinen Stoff zur weitern Entwickelung mehr darböte, und daher die Grenze alles Denkens wäre. Allein wie ungegründet beides ist, wird der Versuch, den ich hier der gelehrten Welt vorlege, hoffentlich außer Zweifel setzen. Ich unternehme es in demselben, nicht nur eine genaue Theorie des Unendlichgroßen überhaupt, sondern zugleich die Anfangsgründe der Meßkunst desselben so deutlich und vollständig zu liefern, daß nunmehr der Mathematiker sowol in der gemeinen als höhern Geometrie das Unendlichgroße mit eben der Leichtigkeit messen kann, mit welcher er bisher das Endliche gemessen, und zugleich mit Gewißheit zu entscheiden im Stande ist, wie weit sich die verschiedenen Ordnungen des Unendlichen erstrecken, welche Ausdrücke desselben Realität und Bedeutung haben, und welche dagegen Chimären und bloße analytische Fictionen sind. Nie hätte mir wol der Gedanke einer solchen Unternehmung einfallen können, wenn ich nicht vorher auf die Theorie der Winkelflächen und der unendlichen körperlichen Räume der Flächenwinkel gekommen wäre. Nicht nur die

Be-

Betrachtung der Zahlen, sondern auch die Betrachtung unendlich großer Linien ist, weil diese alle einander gleich sind, viel zu unfruchtbar, und dient, wenn man bei ihnen stehen bleibt, so wenig dazu, die Natur des Unendlichen aufzuklären, daß sie vielmehr, wie es auch die Erfahrung zur Gnüge gelehrt hat, nothwendig dasselbe in dicke Nacht einhüllen und die irrigsten Begriffe davon erzeugen muß. Bloß die Sätze, aus denen zugleich die Theorie der parallelen Linien und Ebenen so ungezwungen folgt, nemlich, daß die ebenen geradlinigten Winkel ihren unendlichen Flächen, und die Flächenwinkel ihren unendlichen körperlichen Räumen proportional sind, bloß diese liefern das nöthige Maaß für alle unendliche Größen, und eröffnen dadurch, daß sie sehr bald auf verschiedene Ordnungen des Unendlichen führen, zugleich eine freye Aussicht in das ganze Gebiet desselben. Und diese so fruchtbaren Sätze, welche die Mathematik gerade zu dem Gipfel führen, den die menschliche Vernunft für unersteiglich hielt, diese Sätze konnte ein Karsten so geringschätzig behandeln, und ihre unmittelba-

ren Folgen als Ketzerey und Unsinn verschreien, ein Karsten, dem die Würde und Erweiterung der Mathematik so wichtig war?

Es ist mir sehr unangenehm, daß ich in dieser Schrift, die ich im friedlichsten Ton zu bearbeiten dachte, mich so oft wider die höchst unfreundlichen Angriffe dieses berühmten und mir so schätzbaren Mannes vertheidigen müssen, um so mehr, da er noch vor Vollendung derselben bereits den Wissenschaften entrissen und in die Wohnungen des Friedens hinüber gegangen ist. Wäre sein Name in der mathematischen Welt von geringerer Bedeutung, so würde meine Vertheidigung sehr kurz ausgefallen seyn, zumal da jeder Unbefangener die Richtigkeit aller seiner Einwürfe schon aus der Darstellung der vollkommenen Evidenz und Schärfe meiner Theorie der Parallelen, welche mit seinen mathematischen Abhandlungen zu gleicher Zeit herauskam, hinlänglich erkennen konnte. Allein da Angriffe, die ein Mann, der im völligen Ansehen eines Kenners und competenten Rich-

ters steht, mit einem solchen Eifer thut, natürlicher Weise bei vielen einen Eindruck machen, der sie auch gegen die bündigsten Beweise einnimmt; so konnte ich mich dem widrigen Geschäfte nicht entziehen, auch seine unwichtigsten Einwendungen aus dem Grunde zu heben, und zu zeigen, daß, so groß auch seine übrigen mathematischen Verdienste sind, er gleichwol im Fache des Unendlichgroßen, und in den ersten Grundbegriffen der Mathematik kein Kenner und competenter Richter war.

Die Erfahrung hat es auch leider seit der Erscheinung der Karstenschen Abhandlungen hinlänglich gezeigt, welche traurige Gewalt das Vorurtheil des Ansehens auch über so manche Verehrer Euklids hat. Denn noch ist mir nicht das mindeste zu Gesichte gekommen, was man wider den in meiner Darstellung auseinander gesetzten Beweis zu erinnern hätte. Aber denselben, ohne die Sache weiter zu untersuchen, bloß mit Berufung auf Hr. Karsten, der doch meine Darstellung damals noch nicht kannte, sogar als irrig zu

verschreien, hat sich seitdem schon mehr als einer das Vergnügen gemacht. Doch dieses ist nicht genug. Hr. Prof. Hindenburg hat zugleich im dritten Stücke des leipziger Magazins 1786. S. 396 ꝛc. die wichtige Entdeckung bekannt gemacht, daß mein Princip der Geometrie, so wie der Satz von Vergleichung der Parallelstreifen und Winkelflächen, beide nicht einmal neu sind. Das Princip und dessen Anwendung auf die Parallellinien betreffend, beweist er dieses aus einer kleinen Schrift, die unter der Aufschrift: Berichtigung der ersten Gründe der Geometrie, nebst dem Beweise, daß ein einzelnes Körpertheilchen einen Raum einnimmt, 1786 zu Maynz herausgekommen. Die erste vorläufige Anzeige meiner Theorie geschahe in den hiesigen gelehrten und politischen Zeitungen den elften May 1780. Also ist mein Princip nicht neu, weil es schon in einer Schrift stehen soll, die sechs Jahr später als jene erschienen ist. Was soll man hiezu denken? Hr. Hindenburg gesteht zwar, diese Schrift nicht selbst gelesen zu haben; aber was schadet dieses? Das, was ihm daraus durch den Beitrag

zu den **Erlang. gel. Anm.**, der wieder aus der Maynzer gel. Anzeig. 6. St. entlehnt ist, bekannt geworden, ist schon hinreichend. Hier wird nach seiner Anzeige von derselben folgendes gesagt: „Die Erklärung des Winkels, „daß er eine Neigung zweyer Linien gegen „einander sey, wird als unvollständig darge„stellt, indem gezeigt wird, daß die beiden „geraden Linien, welche auf beiden Seiten „die Grenzen des Winkels ausmachen, nur „bestimmen, ob der Winkel spitziger oder „stumpfer sey, **er selbst aber nicht in die„sen Linien, sondern in der Fläche be„stehe, deren Spitze durch sie bestimmt „wird.**„ Und dieses soll mein Princip seyn? Wo ist mir die Ungereimtheit beigekommen, zu sagen, der Winkel bestehe in der Fläche? Habe ich nicht vielmehr Winkel und Winkelflächen aufs sorgfältigste unterschieden, und jedes besonders erklärt? Wenn ich sage: die Größe des Winkels wird durch seine **unendliche** Fläche **bestimmt**, und diese ist demnach das **Maaß** von jenem, heißt das: der Winkel bestehe in der Fläche? So würde auch folgen, daß der Winkel im Kreis-

bogen bestehe, weil er durch diesen als sein Maaß gleichfalls bestimmt wird. Und von welcher Fläche ist denn in der angeführten Stelle die Rede? Wird hier wol mit einer Sylbe an die ganze unendliche Fläche, die zwischen den Schenkeln liegt, gedacht? Ferner heißt es daselbst: „Die Lehre der Parallellinien — ist hier vortrefflich ausgeführt, „und verdient im Ganzen gelesen zu werden.„ Wie verschieden doch die Urtheile der Menschen und besonders der Recensenten sind! In den neuen Leipz. gel. Zeit. 106. Stück 1786 heißt die ganze Anzeige dieser Schrift wörtlich also: In gar keine Betrachtung aber kommt dieses Buch, dessen Verfasser die eigentliche Schwierigkeit nicht gekannt, nicht gewußt zu haben scheint, wovon die Rede ist. Endlich heißt es unmittelbar nach jener Stelle: „Der kurköllnische geheime Rath — hat diese Lehre „(von den Parallellinien) schon vor 40 Jahren in seinen öffentlichen Vorlesungen über „die Geometrie vorgetragen, und es ist „unbegreiflich, daß man darauf nicht aufmerksamer geworden, und sie in die Schu-

„len eingeführt hat.„ Der Mann ist in der That zu bedauern, daß er solche unempfindliche Schüler gehabt, die eine so vortreffliche Lehre nicht weiter ausgebreitet. Doch vielleicht war ihnen, wenn sie mit der obigen einerlei war, sein anderweitiger Ruhm zu werth. Warum theilte er seine Entdeckungen der gelehrten Welt nicht selbst mit? Aber überhaupt ein herrliches Richtmaaß, zu bestimmen, was neu ist, wenn man fortmehro erst Nachfrage thun soll, ob auch schon irgendwo vor 40 und mehrern Jahren ein Professor in seinem Hörsaal was ähnliches vorgetragen haben mag!

Was zweitens die Vergleichung der **Parallelstreifen und Winkelflächen** betrift: so bezieht sich Hr. Hindenburg auf ein Buch, das unter dem Titel: Developement nouveau de la partie élementaire des Mathematiques par Louis Bertrand (Geneve 1778) herausgekommen, in dessen Tome second (p. 19.) der elfte Grundsatz Euklids auf eine ähnliche Art erwiesen worden. Es thut mir leid, daß ich dieses Buch bis auf die jetzige

Stun-

Stunde weder selbst, noch aus irgend einer Recension kenne, es auch aller angewandten Mühe ungeachtet noch nicht habe erhalten können. Daß es auch Hr. Hindenburg 1785, und Hr. Karsten 1786 noch nicht bekannt gewesen, ist außer allem Zweifel, indem sie sonst wol nicht ermangelt haben würden, desselben schon in ihren Beurtheilungen meiner Theorie zu erwähnen. Da der erwähnte Beweis im zweiten Tom steht; so hätte Hr. Hindenburg billig anzeigen sollen, ob derselbe mit dem ersten zugleich ebenfalls schon 1778 herausgekommen, denn dieser Punkt kommt hier sehr in Betrachtung. Sind Hr. Bertrands Principien schon 1778 erschienen, so sind sie entweder anderthalb oder zwei Jahr älter, als die meinigen. Und sind dieselben bei dieser Voraussetzung zugleich mit den meinigen einerlei; so will ich ihm hierin gern als frühern Erfinder den ganzen Ruhm der Erfindung überlassen, und mich an dem Bewußtseyn begnügen, auf meine Begriffe und Sätze weder von ihm, noch von irgend jemanden in der Welt, sondern lediglich durch eigenes Nachdenken geleitet zu seyn.

Da

Da ich über den ersten Punkt zur Zeit noch keine Auskunft habe; so kann ich hier nur den zweiten untersuchen. Nach dem Auszuge aus jenem Buche, den Hr. Hindenburg auf sein Begehren von Hr. Hofrath Kästner nebst dessen Anmerkungen darüber erhalten, und im Leipz. Mag. eingerückt, beruht Hr. Bertrands Beweis auf folgenden drei Sätzen:

1) Deux droites AB, CD (Fig. 11.), qui font sur une troisieme GH des angles intérieurs BGH, DHG égaux ensemble à deux droits, renferment entre elles *une portion du plan* (une bande), *telle qu'il en contient une infinité de pareilles.*

2) D'un angle BGL, loin de pouvoir dire, que le plan en contient une infinité de semblables, on peut dire au contraire, *qu'il n'en contient qu'un nombre fini*, savoir 360 si c'est un degré, 21600 si c'est une minute, 1296000 si c'est une seconde etc.

Die-

Diesen zweiten Satz beweist er noch näher daraus, weil der Kreisbogen als das Maaß des Winkels BGL zur ganzen Peripherie allemal ein endliches Verhältniß hat. Aus beiden Sätzen zusammen schließt er:

3) Donc un angle, quelque petit qu' il soit est toujours (infiniment) plus grand, qu' une de ces parties, que nous avons qualifiées de bandes. Donc il implique contradiction, qu' une bande contienne un angle.

Und hieraus zieht er endlich die Folge, daß GL, HD einander schneiden müssen.

Um meine Leser in den Stand zu setzen, die Bertrandschen Sätze mit den meinigen desto besser zu vergleichen, habe ich seine eigene Worte beibehalten, wie sie im Leipz. Magazin stehen. Der erste von den Bertrandschen Sätzen ist allerdings von ihm aus der Congruenz der Parallelflächen richtig bewiesen. Allein von allen meinen drei Beweisarten ist keine einzige in der Theorie der Parallelen auf denselben gebaut. Uebrigens aber

ist

ist von diesem Satze so wenig Hr. Bertrand, als ich, der erste Erfinder, indem nach dem ersten Bande von Lamberts deutschem gelehrten Briefwechsel, welcher 1781 herauskam, der berühmte Lambert S. 118 schon zu Anfange des Jahrs 1766 an Holland schrieb: „Uebrigens finde ich nicht vielen Anstand zu „glauben, daß es zwischen Unendlichen und „Unendlichen von gleicher Art Verhältnisse „gebe. Ich stelle mir drei Parallellinien „A, B, C vor. A ist doppelt so weit von B, „als B von C. Der Raum zwischen AB „und der zwischen BC ist **unendlich; erstere doppelt so groß, als letzterer**, man „mag ihn als unendlich werdend, oder als „unendlich geworden betrachten. Der Grund „ist, weil das Unendliche die Dimensionen „des **Endlichen** hat. Hingegen bei den „Nullen kann man nur Erdichtungsweise „Dimensionen annehmen.„ Und wäre es denn wol so was Sonderliches, wenn auch schon lange vor Lambert mehrere auf diese so leichte Vergleichung der Parallelflächen unter einander gekommen wären? Der zweite Bertrandsche Satz enthält nichts weiter, als

daß

daß jeder **Winkel** BGL zu allen Winkeln, die um den Punkt G in der Ebene möglich sind, ein endliches Verhältniß habe, so wie der Bogen, der sein Maaß ist, zur ganzen Peripherie des Kreises allemal ein endliches Verhältniß hat. Ein Satz, der jedem Anfänger der Geometrie bekannt ist, und daher nicht erst von Hr. Bertrand erfunden werden durfte.

Der dritte Satz enthält endlich die dem Hr. Bertrand eigene Vergleichung der Parallelstreifen mit den **Winkeln**, und er schließt hier so: der Winkel BGL hat gegen alle Winkel, die um G in der Ebene möglich sind, ein endliches Verhältniß (2. Satz), die Parallelfläche GHDB aber verhält sich zur ganzen Ebene, wie HG zur **unendlichen** Linie HE, d. i. wie das Endliche zum Unendlichen (1. Satz). Also ist der **Winkel** BGL unendlich größer, als die **Parallelfläche** GHDB, d. i. wie Hr. Hofr. Kästner anmerkt, eine **Elle** ist größer, als eine **Stunde**.

Die-

Dieses sind die wahren Principien des Hr. Bertrands, und jetzt wird es mir also erlaubt seyn zu fragen, wie Hr. Hindenburg zu der Behauptung komme: Hr. Bertrand habe bereits, eben so wie ich, die Parallelstreifen mit den **Winkelflächen** verglichen. Daß Hr. Bertrand unter den Parallelstreifen die **Fläche** zwischen den Parallellinien verstehe, bestimmt er sehr genau, indem er ihn ausdrücklich une portion du plan, und sein Verhältniß zum Ganzen un raport à tout le plan, où à toute la surface plane nennt. Aber wo ist in allen seinen beiden Sätzen auch nur die kleinste Spur, daß er unter dem **Winkel**, von dem er redet, seine **Fläche** und zwar die ganze **unendliche** Fläche zwischen seinen Schenkeln meint? Weit entfernt, den Winkel, von dem er redet, gleichfals als eine portion du plan, und sein Verhältniß zum Ganzen als un raport à toute la surface plane zu bezeichnen, nennt er vielmehr das letztere sehr wohlbedächtig zweimal nach einander un raport de l'*angle*, *qui insiste sur l'arc*, à toute la *quantité angulaire autour de centre.* War denn Hr. Hindenburgs

burgs Freude über seine vermeinte Entdeckung so außerordentlich lebhaft, daß er statt Winkel, **Winkelfläche**, und zwar **unendliche** Fläche lesen konnte? Aber so hätten ihn doch wenigstens die **Kästnerschen** Anmerkungen von seiner Illusion zurückrufen sollen. Hr. Bertrand redet ganz bestimmt von einem Centri-Winkel, **der auf einem endlichen Bogen** als seinem Maaße steht. Hiebei läßt sich, auch nach der extensivsten Auslegung, nur zweierlei denken. Entweder meint Hr. Bertrand unter einem solchen Winkel die **Neigung** seiner Schenkel, oder wenn er dabei in der That zugleich an eine Fläche dachte, so konnte er keine andere als den **endlichen** Ausschnitt des Kreises zwischen seinen Schenkeln als Halbmessern und dem endlichen Bogen meynen. So und nicht anders legt ihn auch Hr. Hofrath **Kästner** aus, und zeigt, daß der Satz: jeder Winkel sey größer, als eine Parallelfläche, im erstern Sinne genommen, so viel heißt: eine Elle sey größer, als eine Stunde; im andern aber völlig falsch sey, weil man jederzeit einen solchen Theil der Parallelfläche nehmen kann,

der

der größer ist, als der Kreis-Ausschnitt, der dem Winkel zugehört. Nahm Hr. Hindenburg hier nicht wahr, daß er durch sein so apodiktisches Vorgeben, Hr. Bertrand rede hier von der **unendlichen** Fläche des Winkels, von der ich rede, die ganze Kästnersche Widerlegung für offenbare Chikane und Verdrehung seines Sinnes erklärte? So richtig also auch Hr. Bertrand das Verhältniß der Parallelstreifen gegen einander einsieht, so weit ist er gleichwol von der Einsicht in die Natur der unendlichen **Winkelflächen** entfernt, da doch in meiner Theorie gerade auf diese alles ankommt. Auf **diesen** allein, nicht aber, wie Hr. Hindenburg meint, auf ihrer Vergleichung mit den Parallelflächen beruht meine ganze erste Beweisart, die doch in meiner Theorie der Parallelen die Hauptsache ist, die ich auch in meiner ersten Anzeige 1780 allein bekannt machte, und nicht die Vergleichung der Parallelstreifen unter einander, wie sie Lambert und Bertrand angestellt, sondern bloß der Satz, daß gleiche Winkel gleiche **Winkelflächen** haben, war es, der mich darauf

 führte,

führte, daß der Parallelstreifen gegen die Winkelfläche verschwinde, und mich dadurch in der Folge auch auf die beiden andern Beweisarten leitete. Ja gesetzt selbst, es hätte Hr. Bertrand von den Winkelflächen eine gewisse dunkle und verworrene Idee vorgeschwebt, wie ich dieselbe schon viele Jahre vorher selbst gehabt hatte, obgleich seine Sätze nicht die mindeste Spur davon zeigen, konnte diese wol ein Princip heißen, und mit der strengen und genauen Theorie in Vergleichung kommen, die ich besonders in meiner Darstellung geliefert hatte? Wie wenige Erfindungen würden doch diesen Namen behalten, wenn sie es dadurch zu seyn aufhöreten, daß etwa schon jemand eine dunkle unentwickelte Idee von was Aehnlichem gehabt hätte? Ein jeder Unparteiischer mag also nunmehr urtheilen, mit welchem Grunde Hr. Hindenburg zur unverdienten Verkleinerung meiner Theorie der Welt vormahlen konnte, man fände sie schon bei andern. Uebrigens mag der erste Gedanke von den Winkelflächen in dem Kopfe eines Deutschen, oder eines Franzosen, oder auch eines Chine-

sers entstanden seyn, so ist dieses für die Mathematik wol sehr gleichgültig, aber desto wichtiger für sie ist die entwickelte Theorie derselben, und die auf ihr errichtete erhabene Wissenschaft des Unendlichgroßen. Diese untersuche man also, nicht, wie bisher geschehen, bloß von der Oberfläche, sondern gründlich, besonders aber, wie es Mathematikern vorzüglich geziemt, mit affectloser, unparteiischer, bescheidener Wahrheitsliebe und — chicanire nicht.

Höchst ungern muß ich hier noch eine Anmerkung beifügen, die ich der Wahrheit und mir selber schuldig bin. Ich hatte in meiner Darstellung mit Bescheidenheit angezeigt, daß ich im Hindenburgschen System der Parallellinien nach näherer Prüfung auch den Beweis für seinen **ersten** Fall unzulänglich befunden. Nach vielen andern Verwunderungen über mich wundert sich Hr. Hindenburg endlich auch darüber, wie ich ein **wahres** Urtheil als ein angebliches Versehen zurückgenommen, und an dessen Stelle ein **falsches** gesetzt, das man gewiß nicht für ein

leichtes Versehen annehmen könne, da es nach einer **nähern Prüfung** niedergeschrieben worden. Dieses darzuthun, antwortet er auf meine von ihm zu widerlegende Annahme, CD (Fig. 11.) sey sowol mit GA, als mit GL parallel: „die Vergleichsparallele liege hier **unter** GA und GL, d. i. **nicht zwischen** ihnen, meine Figur stelle also nicht den ersten, sondern den **zweiten** Fall vor,“ und schließt dann mit dem Ausrufe: Also: ἀπροσδιόνυσα ταῦτα· nihil ad me. Damit man nun urtheilen könne, wiefern ich dieses Lobspruchs würdig sey; so frage ich **erstlich** jeden Mathematiker, ob nicht die Sätze: CD liegt **innerhalb dem Winkel** AGL, und CD liegt **zwischen** seinen Schenkeln GA, GL wirklich **synonymisch** sind? Sind sie dieses nicht; so hat der Beweis seines ersten Falles den Sinn: Wenn CD **zwischen** GA, GL liegt, und mit GA, GL parallel ist; so können GA, GL nicht in einem Punkt der Linie CD zusammenstoßen, wie für sich klar ist. Aber dieses kann auch nicht außerhalb CD in irgend einem Punkte G geschehen, denn sonst läge die Vergleichsparallele CD **innerhalb dem Winkel**

kel

kel AGL, mithin nicht zwischen seinen Schenkeln GA, GL, wie doch die Annahme des ersten Falls erfordert. Also sind GA, GL parallel. Ist diese Schlußart befriedigend; so habe ich nichts dawider. Zweitens aber hat Hr. Hindenburg nicht bemerkt, daß sein Beweis für seinen zweiten Fall seiner Behauptung: meine Figur stelle nicht seinen ersten, sondern den zweiten Fall vor, selbst widerspricht. Denn im Beweise des zweiten Falls schließt er zur Widerlegung des Satzes B (Leipz. Mag. 3. St. 1786. S. 381.) also: Nimmt man als wahr an, daß GA, GL zusammenlaufen, so ziehe man durch einen willkührlichen Punkt J in GA eine Parallele KM mit GL; so ist, da CD auch mit GL parallel angenommen worden, auch KM mit CD parallel, NB. weil nemlich hier die Vergleichsparallele CD zwischen KM und GL liege, folglich der erste Fall da sey, welches doch offenbar falsch ist, indem hier KM, CD offenbar beide unter GL, d. i. auf einerlei Seite der Vergleichsparallele GL liegen. Stellt also meine Figur, wie er behauptet, wirklich seinen zweiten Fall vor; so

so ist seine Widerlegung des Satzes B im Beweise des zweiten Falles offenbar widersprechend. Und nun über diese Materie kein Wort mehr, gesetzt auch, daß ich von neuem mit einem: ἀπροσδιόνυσα ταῦτα beehrt würde.

Meine Leser werden mir verzeihen, daß ich hier Dinge berühren müssen, die ich gerne übergangen wäre, wenn nicht zu besorgen stände, daß mein Stillschweigen von manchem als Geständniß würde angesehen seyn. Um nun wieder auf meine gegenwärtige Schrift zurückzukommen, so bin ich, bei aller Sorgfalt, die ich angewandt habe, die schwere Materie, von der sie handelt, aufs gründlichste zu bearbeiten, sehr weit entfernt, ihr schon diejenige Vollkommenheit zuzutrauen, deren sie fähig ist, und die sie unter der Feder größerer Mathematiker hätte erlangen können. Die hier vorgetragene Wissenschaft ist noch in ihrer Kindheit, aber von geübten Analysten kann sie durch Berechnung der übrigen unendlichen Flächen und Körper sehr schnell ihre völlige Ausbildung erhalten. Die

Wahrheit des vorgetragenen Systems liegt zu klar am Tage, als daß sie nicht jedem Wahrheitsfreunde einleuchten sollte, der sich ohne vorgefaßte Meinungen dasselbe gründlich durchzudenken die Mühe giebt; und daß das Unendlichgroße für große Männer zu wenig Reitz oder gar zu wenig Wichtigkeit haben sollte, diese Mühe anzuwenden, läßt sich doch wol ohne Beleidigung nicht denken. Es ist zwar sehr natürlich, daß man im Gebiete des Unendlichen sehr leicht auf Schwierigkeiten und scheinbare Widersprüche stoßen könne, über die man, ehe man sich tief genug in dasselbe hinein gedacht, anfangs stutzig werden kann, weil man sie nicht sogleich zu heben weiß. Aber daß alle diese Schwierigkeiten, so unauflöslich sie auch scheinen mögen, bloße Täuschungen sind, die bei ruhiger Untersuchung bald verschwinden, und die Theorie, die sie wankend zu machen drohten, nur desto klärer bestätigen, davon kann man jedesmal mit der größten Zuverlässigkeit schon voraus versichert seyn. Unter einer Menge ungemein scheinbarer Widersprüche ist mir kaum einer aufgestoßen, der unauflöslicher zu seyn schien,

als der, welcher (Abth. 1. §. 41.) untersucht worden, wie nemlich $\frac{1}{\infty} = 0$ seyn könne, da doch $\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{\infty} = 2,7182\ldots$ ist, aber wie bündig derselbe sich heben läßt, und wie er selbst zur Bestätigung des Satzes dient, ist daselbst schon gezeigt worden, und ich kann hier zu desto größerer Ueberzeugung noch dieses nachholen, daß, wenn man in der Formel: $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$, $n = \infty$ setzt, $\left(1 + \frac{1}{\infty^2}\right)^{\infty}$ genau $= 1^{\infty} = 1$, folglich $\frac{1}{\infty^2}$ genau $= 0$ ist. Dieses aber wäre widersprechend, wenn nicht $\frac{1}{\infty} = 0$ wäre.

Uebrigens muß ich noch einem Mißverstande zuvorkommen, den vielleicht die in der ersten Abtheilung §. 37. angestellte Untersuchung veranlassen könnte. Wenn ich hier zeige,

zeige, daß z. B. $2+2+2+2+\ldots\sim$, oder $1+3+5+7+\ldots\sim$, nicht größer sey, als $1+1+1+1+\ldots\sim$; so ist sehr wohl zu merken, daß dieses nur in der Rücksicht zu verstehen ist, so fern man diese unendliche Reihe als eine einzige betrachtet, weil man in diesem Fall, wenn man in der erstern Reihe statt 2 überall $1+1$ und in der zweiten $1+1+1$ statt 3, $1+1+1+1+1$ statt 5, u. s. w. setzt, die wirkliche Reihe $1+1+1+1+\ldots\sim$ bekommt. So fern man aber eine solche Reihe nicht als eine einzige betrachtet, sondern sie in so viele unendliche Reihen $1+1+1+1+\ldots\sim$ auflöst, als es sich thun läßt; so verhält sich die Sache ganz anders. Z. B. wenn ich die Reihe $2+2+2+2+\ldots\sim$ als eine solche betrachte, die folgende zwey enthält:

$$1+1+1+1+1+\ldots\ldots\sim$$
$$1+1+1+1+1+\ldots\ldots\sim$$

so ist ihre Summe

$$=2(1+1+1+1+1+\ldots\sim)=2\infty.$$

Eben

Eben so, wenn ich die Reihe

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots \sim$$

in diese auflöse:

$$\begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \\ \quad 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \\ \quad 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \\ \qquad 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \\ \qquad 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \\ \qquad\quad 1 + 1 + \ldots\ldots \\ \qquad\quad 1 + 1 + \ldots\ldots \end{array}$$

u. s. w.

so ist ihre Summe so groß, als die Summe einer arithmetischen Progression, in welcher das erste Glied $= 1$, die Differenz $= 2$, und die Zahl der Glieder $= \infty$, folglich das letzte Glied $= 1 + 2(\infty - 1) = 2\infty$ ist, also ist in diesem Falle die Summe von $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots = \infty^2$.

Man muß daher auf diesen doppelten Gesichtspunkt, aus welchem sich dergleichen unendliche Reihen betrachten lassen, wohl Acht haben. Welcher von beiden aber jedesmal

in Betrachtung komme, muß der vorkommende Fall, der auf eine solche Reihe führt, selbst lehren. So ist z. B. aus der Natur einer unendlichen Linie von selbst klar, daß, wenn auch die Formel für die Größe irgend einer Linie die unendliche Summe $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots \sim$ geben möchte, diese doch nur $= 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$ seyn könnte. Dagegen würde, wenn dieser Fall bei unendlichen Flächen oder Körpern vorkäme, schon an sich die Präsumtion seyn, daß hier die unendliche Reihe in alle mögliche, die sie enthält, aufzulösen wäre, weil diese nach der Meßkunst des Unendlichgroßen wirklich größer, als $1 + 1 + 1 + \ldots$ seyn können. Wenn man z. B. in der Archimedischen Spirallinie den Halbmesser des erzeugenden Kreises $= r$, und das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie $= 1 : \pi$ setzt; so ist seine Peripherie $= 2\pi r$, folglich die Fläche des ersten Schneckenganges $= \frac{1}{3}\pi r^2$, des zweiten $= 2\pi r^2$, des dritten $= 4\pi r^2$, des vierten $= 6\pi r^2$, u. s. w. Also ist, wenn man den ersten Schneckengang, der hier in keine Betrachtung kommt, wegläßt, die

ganze

ganze unendliche Fläche dieser Spirallinie $= 2\pi r^2 (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots \sim)$. Nun kann hier diese unendliche Menge nicht $= 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots = \infty$ seyn, denn sonst wäre die unendliche Fläche der Spirallinie $= 2\pi \infty r^2 = 2\pi \infty$ für $r = 1$, d. i. einer bloßen Parallelfläche gleich, welches offenbar ungereimt ist, folglich muß hier die zweite mögliche Bedeutung derselben Statt haben, da dieselbe die Summe aller möglichen Reihen vorstellt, in welche sie sich auflösen läßt, nemlich:

$$
\begin{aligned}
& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots \sim \\
= & \; 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \\
& \quad + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \\
& \qquad + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \\
& \qquad\quad + 1 + 1 + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

u. s. w.

d. i. man muß die ganze unendliche arithmetische Progression, in welcher das erste Glied und die Differenz $= 1$, und die Zahl der Glieder $= 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots = \infty$ ist, summiren. Da nun, wenn das erste Glied $= a$,

die

die Differenz $= d$, und die Zahl der Glieder $= n$ ist, die Summe $= \frac{1}{2}n(a + (n - 1)d)$ ist; so ist die Summe der unendlichen Reihe $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = \frac{1}{2}\infty(1 + (\infty - 1)) = \frac{1}{2}\infty^2$. Also ist die unendliche Fläche der archimedischen Spirallinie $= \pi\infty^2 r^2$, folglich, wenn man $r = \gamma = 1$ setzt, $= \pi\infty^2$ d. i. so groß als die ganze unendliche Ebene. Und daß dieses richtig sey, ist für sich klar, indem sich kein Kreis um den Anfangspunkt dieser Spirallinie angeben läßt, über dessen Fläche dieselbe nicht hinausgienge.

Ich war anfangs willens, die Summationen dieser Reihen, so fern sie als wirkliche steigende unendliche Progressionen oder Reihen zu betrachten sind, die sich in unendlich viele auflösen lassen, in der ersten Abtheilung mit zu untersuchen. Allein da diese zu stark anwuchs, und außerdem bei ihrer Ausarbeitung mir noch kein Fall aus der Geometrie des Unendlichgroßen eingefallen war, auf den diese Materie anwendbar wäre; so änderte ich meinen Vorsatz. Hier ist also noch ein freies Feld zu bearbeiten übrig, das die Ein-

sicht

sicht ins Unendlichgroße vielleicht noch auf mannigfaltige Weise erweitern kann, und worüber ich mich im zweiten Theile, in welchem ich die Theorie des Unendlichkleinen und der Lage zu entwickeln gedenke, vielleicht schon auf eine fruchtbarere Art zu erklären im Stande seyn werde.

Vom
Unendlich Großen
und
der Meßkunst desselben.

Erste Abtheilung.

Vom Unendlichen überhaupt.

Erster Abschnitt.

Vom absolut Unendlichen.

§. 1.

Eine Grösse heißt an sich oder im absoluten Verstande endlich, wenn sie völlig begrenzt ist.

§. 2.

Daß dieser Begriff, den auch Hr. Hofrath Karsten in seinen mathematischen Abhandlungen S. 6. §. 4. annimmt, der eigentliche ist, den wir mit dem Endlichen verknüpfen, zeigt schon das Wort: endlich, selbst an. Denn dieses bedeutet so viel, als: was ein Ende hat, d. i. was nicht nur eine Grenze hat, wo es anfängt, sondern auch eine, wo es völlig aufhört. Noch deutlicher aber kann man sich hievon überführen, wenn man bei jeder Grösse, von welcher Art sie irgend seyn mag, untersucht, was wir eigentlich

 dar-

darunter denken, wenn wir sie endlich nennen. Wenn wir z. B. eine Linie endlich nennen; so denken wir in ihr einen Punkt, wo sie anfängt, und einen andern, wo sie aufhört. Durch diese beiden Punkte aber ist die Linie völlig begrenzt, also nennen wir eine Linie endlich, wenn wir wissen, daß sie völlig begrenzt ist. Aus diesem Grunde nennen wir auch jede Figur, imgleichen jeden Körper endlich, weil wir unter jener eine völlig begrenzte Fläche, und durch diesen einen völlig begrenzten körperlichen Raum verstehen. Die Zeit nennen wir endlich, so fern wir sie zwischen zween verschiedenen Augenblicken begrenzen, und die Geschwindigkeit eines Körpers, in so fern der Raum, welchen derselbe in einer endlichen Zeit durchläuft, endlich ist. Was von den extensiven und protensiven Größen gilt, gilt auch von den Zahlen. Eine Zahl ist nichts andres, als die Bestimmung der Menge, wie vielmal entweder die Einheit selbst, oder ein gewisser aliquoter Theil derselben genommen werden soll. Die Bestimmung, wie vielmal man die Einheit selbst nehmen soll, heißt eine ganze Zahl. Die Bestimmung, in wie viele gleiche Theile man die Einheit theilen, und wie vielmal man den hiedurch erhaltenen aliquoten Theil nehmen soll, heißt eine gebrochene Zahl. Bei der Größe einer Zahl, als Zahl, kommt also die Größe der Einheit in gar keine Betrachtung, sondern bloß die Menge oder das Wie viel, denn die Zahl 8 oder $\frac{5}{7}$ bleibt immer dieselbe, man

mag

mag darunter Meilen, oder Zolle verstehen. Mithin ist eine Zahl völlig begrenzt, wenn die **Menge**, oder das **Wie viel**, welches in ihr vorkommt, völlig begrenzt ist. Nun wird eben durch die Bestimmung, wie vielmal man die Einheit nehmen soll, die Menge der Einheiten völlig begrenzt; nemlich wenn nicht bestimmt wird, wie vielmal ich die Einheit nehmen soll, so kann ich die Reihe $1 + 1 + 1 + 1$ ꝛc. so weit fortsetzen, als ich will, indem ich nicht weiß, bei welchem Gliede ich aufhören soll; bestimmt man aber, ich soll die Einheit 3mal nehmen, so heißt dieses soviel: ich soll $1 + 1 + 1$ setzen, und ich weiß daher, bei welchem Gliede der Reihe ich aufhören soll. Wenn wir also eine jede ganze Zahl endlich nennen, so denken wir darunter nichts andres, als daß die Menge der Einheiten, die sie enthält, völlig begrenzt ist; und eben so nennen wir jeden Bruch, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, endlich, weil durch den Nenner die Menge, in wieviel gleiche Theile die Einheit getheilt werden soll, und durch den Zähler die Menge, wievielmal man den hiedurch erhaltenen aliquoten Theil nehmen soll, völlig begrenzt wird. Was endlich die intensiven Größen betrifft; so nennen wir diese ebenfalls endlich, so fern wir uns den Grad, durch welchen wir ihre Größe messen, als völlig begrenzt vorstellen. So nennen wir die Schwere endlich, so fern die Geschwindigkeit der fallenden Körper endlich ist; ein Gewicht, so fern

es eine weiche Masse nur bis zu einer gewissen Grenze eindrückt; die Wärme, so fern sie die Körper nur bis zu einer gewissen Grenze ausdehnt, und überhaupt jede Kraft, so fern der Grad ihrer Wirksamkeit völlig begrenzt ist.

§. 3.

Wenn man jede Größe, die kleiner, als die endliche Größe a ist, durch p ausdrückt; so ist die Ordnung, in welcher alle mögliche endliche Größen auf einander folgen, diese:

$$p,\ a,\ a + p,\ 2a,\ 2a + p,\ 3a,\ 3a + p,\ 4a,\ 4a + p \text{ u. s. w.}$$

Denn in dieser Reihe ist nicht nur jedes folgende Glied größer, als jedes vorhergehende, sondern es ist auch zwischen zwey nächsten Gliedern niemals eine Lücke zu einem Zwischengliede offen. Also muß jede endliche Größe b, die größer als a ist, nothwendig irgend eins von den Gliedern dieser Reihe seyn. Wenn man daher jede ganze Zahl 1, 2, 3 rc. allgemein durch n ausdrückt; so ist jede endliche Größe b, die größer als a ist, entweder $= na$, oder $= na + p$, mithin entweder $b = na$, oder b größer, als na, aber kleiner, als $(n + 1)a$. Wenn also eine endliche Größe b größer, als die endliche a ist; so muß es allemal eine solche ganze Zahl n geben, daß entweder $na = b$, oder na zwar kleiner, als b, aber $(n + 1)a$ schon größer als b ist.

§. 4.

Wenn von zwo endlichen Größen a und b, $b>a$, aber a kein aliquoter Theil von b ist; so kann niemals $na=b$ seyn. Also muß es in diesem Falle allemal eine solche ganze Zahl n geben, daß zwar na noch kleiner, als b, aber $(n+1)a$ schon größer, als b ist (§. 3.).

§. 5.

Wenn also von zwo endlichen Größen a und b, $b>a$, und kein aliquoter Theil von a ein aliquoter Theil von b ist; so muß es für jeden angenommenen aliquoten Theil $\frac{a}{m}$ allemal eine solche ganze Zahl n geben, daß $n\cdot\frac{a}{m}<b$, aber $(n+1)\cdot\frac{a}{m}>b$ ist (§. 4.).

§. 6.

Eine endliche Größe a sey noch so klein, und eine endliche b noch so groß; so giebt es doch allemal eine solche ganze Zahl r, daß $ra>b$, und $\frac{1}{r}b<a$ ist.

Denn wenn $b>a$ ist; so giebt es allemal eine solche ganze Zahl n, daß entweder $na=b$, oder zwar $na<b$, aber schon $(n+1)a>b$ ist (§. 3.), mithin giebt es in beiden Fällen ein $(n+1)a>b$. Setzt man also $n+1=r$; so

so giebt es allemal eine solche ganze Zahl r, daß $ra > b$, also auch $\frac{1}{r} b < a$ ist.

§. 7.

Eine Größe heißt an sich oder im absoluten Sinne unendlich, wenn sie nicht endlich ist, und zwar unendlich groß, wenn sie größer, unendlich klein aber, wenn sie kleiner ist, als jede endliche Größe. So heißt z. B. eine Linie an sich unendlich groß oder klein, wenn sie größer oder kleiner ist, als jede endliche Linie.

§. 8.

Dieses ist ohne Zweifel der erste natürliche Begriff, den sich ein jeder vom Unendlichen macht. Unter dem Unendlichen denken wir uns ursprünglich etwas, was nicht endlich ist, d. i. was keiner endlichen Größe gleich ist. Nun aber ist eine Größe, die einer andern gleichartigen nicht gleich ist, entweder größer, oder kleiner, als diese. Also können wir natürlicher Weise unter dem Unendlichen nichts andres denken, als was entweder größer, oder kleiner ist, als jede gleichartige endliche Größe, und so nennen wir daher das erstere unendlich groß, und das andere unendlich klein. Man pflegt insgemein eine endliche Größe durch eine solche zu erklären, die sich angeben läßt, und eine unendlich große oder kleine durch eine solche, die größer, oder kleiner ist, als jede Größe, die sich angeben läßt, (quantitas aut *dabilis*, aut

omni

omni *dabili* maior vel minor). Allein der Begriff des Gebens oder Angebens scheint mir ohne nähere Bestimmung zu vieldeutig und dunkel zu seyn.

Zuerst versteht der Mathematiker unter dem Geben einer Größe das, was der Philosoph determiniren, bestimmen nennt. Eine Größe A von gewisser Art ist ihm durch andere B, C rc. gegeben, wenn jene durch diese völlig bestimmt wird, d. i. wenn unter Voraussetzung der Größen B, C, keine andere mehr, als die einzige A möglich ist. So sagt man z. B. durch die drey Seiten eines Dreyecks sind alle drey Winkel gegeben, durch die drey Winkel aber sind die drey Seiten nicht gegeben, weil im erstern Falle die Größe eines jeden Winkels bestimmt, d. i. nur eine ist, im letztern aber dieses von den Seiten nicht gilt. Wollte man nun in diesem Sinne des Worts sagen, jede Größe, die gegeben d. i. durch andere Größen völlig bestimmt wird, ist endlich; so wäre dieses offenbar zu voreilig, indem hier erst die Frage entsteht, ob nicht das, was durch gewisse Voraussetzungen völlig bestimmt wird, auch etwas Unendliches seyn kann. Denn völlig bestimmt und endlich seyn, sind überhaupt ganz verschiedene Begriffe. Jedes existirende Wesen ist völlig bestimmt (omnimode determinatum), aber deshalb ist nicht jedes existirende Wesen endlich. Durch den Begriff des allervollkommensten Geistes sind seine Eigenschaften völlig

bestimmt, oder, nach mathematischer Sprache, gegeben, gleichwol sind sie alle unendlich. Wenn man $\sqrt{2} = 1,414.....$ setzt; so ist die Menge der hieher gehörigen Decimalziffern unendlich groß, indessen ist jede von diesen unendlich vielen Ziffern völlig bestimmt oder gegeben. Eben so sind in der Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}....$ durch das erste Glied 1, und den Exponenten $\frac{1}{2}$ alle Glieder derselben ohne Ende fort gegeben, und meiner Meinung nach müssen einem unendlichen Verstande, der nicht, wie der unsrige, an die Vorstellung der Zeitfolge gebunden und successiv zu zählen genöthigt ist, sondern alle Dinge zusammen und auf einmal durchschaut, in den angeführten unendlichen Reihen alle Glieder durchaus gegenwärtig seyn.

Zweitens versteht man in der Mathematik durch gegebene Größen auch diejenigen, die man voraussetzt, und durch deren Voraussetzung eben gewisse andere bestimmt werden, oder nicht. Wie man sagt: A ist durch B, C gegeben: so sagt man auch: A ist gegeben oder nicht, wenn B, C gegeben ist. Z. B. das Dreyeck ist gegeben, wenn die drey Seiten gegeben sind. Wollte man nun in dieser zweiten Bedeutung des Worts sagen: jede Größe, die sich geben d. i. voraussetzen läßt, ist endlich; so wäre dieses wiederum zu voreilig, weil hier eben so, wie vorhin, erst untersucht werden müßte, ob nicht etwa auch durch Voraussetzung unendlicher Größen eine andere gleichartige endliche oder unendliche völlig bestimmt wer-

werden könne, und weil überhaupt, nach der ersten Numer, selbst in dem Fall, da die vorausgesetzten Größen völlig bestimmt sind, noch gar nicht folgt, daß sie endlich sind.

Drittens heißt bei den Mathematikern gegeben seyn, auch so viel als bekannt seyn. Denn man setzt gewöhnlich die gegebenen Größen den gesuchten oder unbekannten entgegen. In diesem Sinne bedeutet also eine Größe, die sich angeben läßt, eine solche, die man als bekannt ansehen kann. Soll aber eine Größe bekannt seyn, so ist es nicht genug, daß ihr Verhältniß zu der Größe, die man zur Einheit oder zum Maaße annimmt, bekannt ist, sondern dieses Maaß muß auch selbst bekannt seyn. Wir müssen also von diesem eine unmittelbare Vorstellung, oder, in der Sprache des Hrn. Kant, eine Anschauung haben. Nun haben wir letztere entweder durch wirkliche Empfindung des Gegenstandes, und denn heißt sie empirische Anschauung, oder es ist in ihr nichts, was zur Empfindung gehört, sondern sie liegt vielmehr schon aller Empfindung als Form unserer Sinnlichkeit in unserer Seele zum Grunde, und denn heißt sie reine Anschauung. Also ist uns die zum Maaß angenommene Größe bekannt, wenn wir von ihr entweder eine empirische, oder reine Anschauung haben. Nun ist zwar klar, daß, da unsere Empfindungen eingeschränkt sind, auch alles das, was wir durch Empfindung kennen, eingeschränkt und endlich seyn muß, mithin

hin muß jedes empirische Maaß, z. B. ein Stab, den wir einen Fuß, ein Gewicht, das wir ein Pfund nennen, nothwendig eine endliche Größe seyn. Allein da die Geometrie als reine Größenlehre mit keinen wirklichen Objecten, sondern lediglich mit dem Raum zu thun hat; so finden in ihr keine empirische Größen statt, sondern ihren Gegenstand, den Raum, kennen wir bloß durch reine Anschauung, und es kann wol kaum etwas sonderbarers seyn, als wenn man sich einbildet, daß wir den Raum nur durchs Gesicht, oder durchs Gefühl kennen, als ob derselbe ein Gegenstand unserer Empfindung wäre, den wir eben so wie die Materie, durch das Licht, das sie in unser Auge wirft, oder durch die Kraft, mit welcher sie auf unsere Hand wirkt, sehen und fühlen könnten. Da also die reine Anschauung gar nicht von unsern eingeschränkten Empfindungen abhängt, sondern diesen vielmehr vorhergeht; so folgt hier noch nicht, daß das, was uns durch reine Anschauung bekannt oder gegeben ist, gleichfalls endlich seyn müsse, sondern hier entsteht erst die Frage, ob diese uns nicht etwa auch unendliche Gegenstände geben könne, und ob sich also in der Geometrie nicht vielleicht auch unendliche Linien, Flächen und körperliche Räume als durch reine Anschauung bekannte Größen zum Maaße anderer Größen annehmen lassen? Meinem Bedünken nach ist letzteres außer allem Zweifel. Wir kennen, wie Hr. Kant sehr richtig erinnert, nur einen körperlichen

Raum,

Raum, und die Vorstellung, die wir so wohl von ihm selbst, als auch von jeder ebenen Fläche und Linie, die wir in ihm als Grenzen denken, haben, ist die Vorstellung von etwas völlig Unbegrenztem, d. i. von etwas Unendlichem. Diese Vorstellung von ihm haben wir nicht erst mittelbar vermittelst unserer äußern Empfindungen; denn was wir durch diese erkennen, ist ohnehin allemal begrenzt und endlich, und eben so wenig durch irgend einen Vernunftschluß etwa aus der Möglichkeit unendlich vieler Körper; denn der Beweis, daß noch mehrere Körper außer mir, oder außer denen, die ich durch meine Empfindungen kenne, möglich sind, setzt schon die Vorstellung voraus, daß da, wo ihre Ausdehnung aufhört, der Raum selbst nicht mit aufhört, sondern ohne Ende fortgeht. Die Vorstellung, die wir vom unendlichen Raum haben, ist also eine unmittelbare und zwar von allem Empirischen freye Vorstellung, d. i. der ganze unendliche Raum und alle unendliche Ebenen und geraden Linien in ihm sind uns durch reine Anschauung bekannt und gegeben. So wenig wir je aus irgend einer Erklärung lernen würden, was Richtung, was gerade Linie und ebene Fläche sey, und wie sie möglich sey, so wenig kann auch je ein Geometer beweisen, daß jede gerade Linie und jede ebene Fläche ohne Ende verlängert werden könne, sondern jedermann sieht das letztere eben so wie das erstere als unmittelbar bekannt und gegeben an, und ist schlechterdings in eben

dem

dem Grade gezwungen, es dafür anzusehen, als er das Rothe roth zu sehen genöthigt ist.

Viertens verstehen viele unter dem, was sich angeben läßt, auch das, was sich construiren oder darstellen läßt, d. i. wovon wir eine anschauliche Vorstellung haben. Nun muß zwar das, wovon wir eine empirische Anschauung haben sollen, nothwendig endlich seyn. Allein da von dieser in der Geometrie niemals die Rede ist, und eine Größe construiren nicht heißt, sie physisch zeichnen oder empirisch anschaulich machen, sondern sie der reinen Anschauung vorlegen, letztere aber auch, wie no. 3. gezeigt worden, das Unendliche zum Gegenstande hat; so folgt hieraus, daß im wahren geometrischen Sinne sich auch das Unendliche construiren, mithin angeben läßt. Wollte aber jemand darauf bestehen, daß von dem, was sich angeben läßt, nothwendig auch eine empirische Darstellung möglich seyn müsse; so würde ich ihn bloß bitten, mir doch den centillionsten Theil eines Zolls, der doch gewiß endlich ist und sich daher construiren lassen muß, auf eine empirische Art darzustellen.

Endlich merkt Hr. Hofrath Karsten, a. a. O. S. 48. §. 46., noch an, daß die alten Geometer auch sogar durch das omni *dabili* minus eigentlich nur ein omni *dato* minus, und daher nicht unendlich kleine Größen, sondern wahre endliche Größen verstanden haben.

Da also der Ausdruck: eine Größe läßt sich angeben, von den Mathematikern in so vielerley Bedeutung genommen wird; so scheint derselbe, ohne nähere Bestimmung, wol nicht für eine Definition schicklich zu seyn. Denn man mag unter einer angeblichen Größe entweder eine solche verstehen, die sich bestimmen, oder voraussetzen, oder als bekannt annehmen, oder construiren läßt; so muß in allen diesen Fällen natürlicher Weise Irrthum entstehen, wenn man hieraus ohne weitere Umstände schließt, daß sie endlich sey, wie dieses auch die Erfahrung nur zu oft bestätigt. Soll demnach die Erklärung: endlich ist, was sich angeben läßt, unendlich, was sich nicht angeben läßt, richtig seyn; so muß man nothwendig durch das Angebliche eine völlig begrenzte Größe verstehen, und dieses hat man ohne Zweifel bei der angezeigten Erklärung auch wol jederzeit im Sinne gehabt.

§. 9.

Da eine absolut unendlich große Größe größer ist, als jede endliche (§. 7.), folglich größer, als jede völlig begrenzte Größe (§. 1.); so muß sie wenigstens in einer Rücksicht unbegrenzt, mithin etwas ohne Ende wachsendes und fortgehendes seyn. So muß z. B. eine Linie, die von einem gewissen Punkte anfängt, wenn sie unendlich groß seyn soll, wenigstens nach einer Seite hin als unbegrenzt und ohne Ende fortgehend gedacht werden. Eben so muß jede unendlich große Flä-

che, ingleichen jeder unendlich große körperliche Raum, wenigstens nach einer Seite ohne Ende fortgehen, wie z. B. die Ebene zwischen den Schenkeln eines geradlinichten, oder der körperliche Raum zwischen den Ebenen eines soliden Winkels. Wenn man sich daher beim Unendlichgroßen da, wo dasselbe als ohne Ende fortgehend gedacht wird, ein Ende oder eine Grenze einbildet, so ist dieses offenbar ein Widerspruch. Hieraus fließen also folgende Sätze:

1. Ein Punkt, der von einem gegebenen unendlich weit entfernt ist, ist ein Unding. Denn die Weite zweier Punkte ist die gerade Linie von dem einen zum andern, folglich ist die unendlich große Weite eines Punkts von einem gegebenen, eine gerade Linie, die nach der Seite hin, wo sie unbegrenzt ist, einen Endpunkt, mithin eine Grenze hat.

2. Also sind Linien oder Flächen, die in einer unendlichen Weite zusammenstoßen, Undinge, nemlich zusammenstoßende Linien oder Flächen, die gar nicht zusammenstoßen.

3. Daher ist auch ein Dreyeck, das eine unendlich große Seite hat, ein Unding. Denn da ihm die dritte Spitze oder Ecke fehlt; so wäre es ein zweyeckichtes Dreyeck, oder eine Figur, d. i. eine völlig begrenzte Fläche, die nicht völlig begrenzt ist.

4. Eben daher ist auch in einer krummen Linie die Ordinate einer unendlich großen Absciſſe

ein Unding. Denn jede Ordinate geht von dem Endpunkte der Abscisse aus, mithin ist die Ordinate einer unendlich groſsen Abscisse diejenige, die vom Endpunkte einer Abscisse ausgeht, welche keinen Endpunkt hat.

§. 10.

Obgleich aber jede unendlich groſse Gröſse etwas ohne Ende wachsendes ist; so ist dennoch nicht umgekehrt jede ohne Ende wachsende Gröſse unendlich groſs. Denn wenn die Theile, um welche sie wächst, immer kleiner werden; so kann sie ohne Ende wachsen, und doch immerfort kleiner als eine gewisse endliche Gröſse bleiben. Je weiter z. B. die Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ fortgeht, desto mehr wächst die Summe derselben, und wenn diese Reihe ohne Ende fortgeht, so wächst auch die Summe ohne Ende fort, gleichwol kann sie nie gröſser als 1 werden, mithin ist sie in der That begrenzt, und daher endlich. Soll also eine Gröſse unendlich groſs seyn; so ist es nicht genug, daſs sie etwas ohne Ende wachsendes ist, sondern sie muſs, wie sich Hr. Hofr. Kästner ausdrückt, zugleich ins Unendliche wachsen, d. i. so, daſs sie auch jede endliche Gröſse übersteigt (§. 7.). Nun ist, wenn a irgend eine endliche Gröſse, und n irgend eine ganze Zahl ist, na allemal endlich, man mag a und n so groſs annehmen, als man will; mithin muſs eine unendlich groſse Gröſse gröſser seyn, als na, d. i. gröſser, als jedes endliche Multiplum einer end-

lichen Größe. Dieser Satz aber ist auch umgekehrt wahr; nemlich, eine Größe, die größer ist, als na, d. i. größer, als jedes endliche Multiplum einer endlichen Größe, ist allemal unendlich groß. Denn, wäre sie endlich, so ließe sich die Zahl n so groß annehmen, daß na größer, als sie, würde (§. 6.). Also heißt eine Größe b im absoluten Sinne unendlich groß, wenn sie größer ist, als na, man mag die endliche Größe a und die ganze Zahl n so groß annehmen, als man will; d. i. wenn sie größer ist, als jedes endliche Multiplum einer endlichen Größe.

§. 11.

Wofern sich daher eine unendlich große Größe in mehrere gleiche Theile theilen läßt; so ist jeder aliquote Theil derselben gleichfalls unendlich groß. Denn, wenn b unendlich groß ist, so ist, a und n mögen noch so groß seyn, allemal $b > na$ (§. 10.), folglich $\frac{b}{n} > a$, also $\frac{b}{n}$ unendlich groß (§. 7.).

§. 12.

Eine **Menge** von Einheiten heißt **unendlich groß**, wenn sie größer ist, als jede ganze Zahl. Denn sie ist größer, als jede endliche Menge von Einheiten (§. 7.). Nun aber heißt jede endliche Menge von Einheiten eine ganze Zahl (§. 2.). Also heißt eine Menge von Einheiten unendlich groß, wenn sie größer ist, als jede ganze Zahl.

Man bedient sich auch gewöhnlich des Ausdrucks einer unendlich großen Zahl. Allein da man unter einer Zahl eigentlich immer etwas Endliches, unter dem Unendlich Vielen aber gerade so etwas denkt, was sich durch keine Zahl mehr ausdrücken läßt; so scheint es mir richtiger zu seyn, wenn man statt einer unendlichen Zahl lieber unendlich viel, oder eine unendliche Menge sagt.

§. 13.

Also ist eine unendlich große Menge eine solche Menge von Einheiten, die wenigstens von einer gewissen Einheit an unbegrenzt und ohne Ende fortgeht (§. 1.), z. B. 1 + 1 + 1 + 1 .... ∼, oder 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... ∼ u. s. w.

Hieraus fließen demnach folgende beide Sätze:

1. Das unendlich vielste Glied einer Reihe ist ein Unding. Denn es müßte das letzte Glied einer Reihe seyn, in welcher die Menge der Glieder unendlich groß, mithin ohne Ende fortgehend ist, also das letzte Glied einer Reihe, in welcher kein Glied das letzte ist.

2. Also ist auch der unendlich vielste Theil einer endlichen Größe B ein Unding. Denn der unendlich vielste Theil einer Größe B heißt derjenige aliquote Theil, der unendlich vielemal genommen die Größe B giebt. Nennt man also denselben a; so muß B = a + a + a + a + ... ∼ seyn, folglich bekommt man B nicht eher, als bis die Reihe a + a + a + ..., die ohne Ende fort-

gehen soll, bereits wirklich geendigt ist. Da nun dieses ein Widerspruch ist; so ist B eine Größe, die durch Wiederholung des Theils a niemals entsteht. Allein wenn B endlich ist, so ist B völlig begrenzt, folglich muß, wenn a ein aliquoter Theil von B ist, durch die Wiederholung des Theils a die Größe B nothwendig entstehen. Also ist der unendlich vielste Theil einer endlichen Größe ein Unding.

§. 14.

Da eine unendlich große Größe $b > na$ ist, so groß man auch a und n annehmen mag (§. 10.); so enthält sie jede endliche Größe a mehrere male, als jede ganze Zahl n anzeigt, mithin unendlich viele male (§. 12.). Wenn man daher eine unendliche Menge durch ∞ ausdrückt; so ist eine unendliche Größe $b = \infty . a$. Also verhält sich jede endliche Größe a zu einer unendlichen b, wie die Zahl 1 zu einer unendlichen Menge ∞. Und da a unendlich viele mal genommen die unendliche Größe b giebt; so ist a der unendlich vielste Theil von b. Also ist zwar der unendlich vielste Theil einer endlichen Größe ein Unding, dagegen aber ist von einer unendlichen Größe jede gleichartige endliche in der That der unendlich vielste Theil, indem man durch Wiederholung derselben die unendliche Größe niemals erreicht, sondern die Menge der Theile hier eben so ohne Ende fortgehen muß, als die unendliche Größe selbst.

§. 15.

Endlich ist noch zu merken, daß der Begriff des Unendlichgroßen gar nicht den Begriff des Größesten in sich schließt; denn er sagt nichts weiter, als daß dasselbe überhaupt größer sey, als jede endliche Größe, ohne übrigens zu bestimmen, ob dasselbe nur eins, und daher das Maximum aller Größen sey, oder ob mehrere unendlich große Größen möglich seyn, von denen eine größer seyn könne, als die andere.

§. 16.

Herr Hofrath Karsten behauptet mit vielem Eifer das Gegentheil hievon, und meint, es folge schon aus dem Begriff des Unendlichgroßen, daß dasselbe nur eins sey. Er erklärt (math. Abhandl. §. 14.) das Unendlichgroße, das man gewöhnlich durch ∞ bezeichnet, durch eine Menge, die man nicht mehr zählen kann, „und es ist,„ sagt er, „eben darum $\frac{1}{0} = \infty$, weil es unter den „Brüchen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. keinen giebt, der es „anzeigen könnte, der wievielste Theil die Null „vom Ganzen sey. Eben darum muß auch das „Zeichen $\frac{1}{\infty}$ mit o einerley seyn. Wenn man „nicht mehr zählen kann, wie vielmal ein Theil „in seinem Ganzen enthalten sey, so ist er gar „kein Theil des Ganzen mehr, er ist das, was „man mit o bezeichnet. Wofern man nun nicht „ohne Noth Schwierigkeiten machen will, wo

„gar keine sind; so folgt aus diesem allen, daß „man sich die 0 als den letzten unter allen beständig abnehmenden Brüchen vorstellen kann, als „einen Bruch, dessen Zähler 1 ist, dessen Nenner aber die letzte unter allen ganzen Zahlen seyn „muß, wovon man sich im Verstande einen Begriff machen kann. Diese letzte unter allen ganzen Zahlen kann man beim Fortzählen nie erreichen, es ist nicht die letzte, die man angeben, „sondern die letzte, welche sich der Verstand vorstellen kann, und alle denkbare Zahlen sind als„denn zwischen den beiden Gränzen $0 = \frac{1}{\infty}$ und „$\infty = \frac{1}{0}$ enthalten. Was wir Eins nennen, „befindet sich in der Mitte zwischen diesen beiden „Gränzen.„ Hieraus schließt er §. 17., daß das Unendlichgroße bestimmt, d. i. nur eines sey. „Wenn ein Bruch $\frac{1}{x} = 0$ gesetzt wird, so erhält er einen unter allen möglichen bestimmten „Werthen, die er ganz allgemein bezeichnet, wenn „sein Nenner x veränderlich oder unbestimmt ist: „der mit dem Werth $\frac{1}{x} = 0$ zusammengehörige „bestimmte Werth des Nenners ist: $x = \infty$. „Jener Werth ist die eine, dieser Werth die an„dre Gränze aller Werthe einer veränderlichen „Größe, die sich der Verstand vorstellen kann „(14. §.). So erhellet, daß das Unendliche „oder

„oder Unendlichgroße mit dem Unbestimmten „nicht einerley sey. Es giebt nur einen bestimm„ten Werth $x = \infty$, weil es nur einen bestimm„ten Werth $\frac{1}{x} = 0$ giebt.„ Eben so erklårt er sich §. 37. „Gründlich und richtig denkende Ma„thematiker haben also keineswegs eben so viele „unendlich kleine, und eben so viele unendlich „große, als endliche Größen. Sie haben nur „ein unendlich kleines, welches mit 0 einerley ist; „und ein unendlich großes, das sie mit ∞ oder $\frac{1}{0}$ „bezeichnen.„ Dieser Satz des Hrn. Hofrath Karsten, daß das Unendlichgroße nur eins sey, weil das Unendlichkleine, nemlich die Null, nur eins ist, ist der erste Held, durch welchen er meine ganze Theorie der Parallelen auf einmal zu Boden gedrückt zu haben glaubt, und freilich wåre es um diese völlig geschehen, wenn jener mehr als ein gemahlter wåre. Denn wåre das Unendlichgroße nur eins, so könnte auch nicht eins größer, als das andere, also auch nicht die Flåche eines größern Winkels größer, als die Flåche eines kleinern seyn. Da Hr. Karsten sich hiebei auf gründlich und richtig denkende Mathematiker bezieht, so setzt mich dieses in eine nicht wenig mißliche Lage. Denn, erkühnte ich mich, seine Behauptung zu bestreiten, so wåre mir schon das Urtheil voraus gesprochen, daß ich nicht gründlich und richtig denke, und schwiege ich, so wåre die-

ses ein Geständniß, daß ich in meiner Theorie nicht gründlich und richtig gedacht hätte. Aeußerst erwünscht ist es mir daher, daß im dritten Stück des Leipziger Magazins für reine und angewandte Mathematik 1786. S. 420. bereits ein Gelehrter in der Note c zum Auszuge aus Karstens mathemat. Abhandl. mich aus jener bedenklichen Lage gesetzt hat. Hier sind seine eigene Worte: „Bei „Nichts denkt man sich bestimmt: Keine Größe. „Ein Nichts ist nicht mehr noch weniger als das „andre. Unendlich groß ist kein bestimmter Be„griff; jede Größe, von der man einen solchen „Begriff hat, ist bestimmt. Wer eine nicht mehr „zählbare Menge denkt, denkt sie nicht als nur „eine, eigentlich ist sein Begriff nur verneint: „nicht mehr zählbar. Nach dem Geständnisse „aller Mathematiker ist doch dieser Begriff viel „schwerer, als der vom Nichts. Auch hat man „nie über das Nichts gestritten, und so viel über „das Unendliche. Daß man bei 2·0, 3·0, „nichts anders denkt, als bei 1·0, habe ich in „der Anm. (b) gezeigt. Aber bei 2·∞, 3·∞ „u. s. w. denkt man gewiß was anders, als bei „1·∞. Das ist, was ich damit sagen will: „wer eine unzählbare Menge denkt, denkt sie nicht „als nur eine.„ Ob nun der Mann, der diese Sprache führt, zu den gründlich und richtig denkenden Mathematikern gehört, und ob ihm unter diesen die letzte oder die erste Stelle zukommt, mag Hr. Hofrath Karsten und die ganze gelehrte

Welt

Welt entscheiden. Der Name, mit dem er sich unterzeichnet hat, ist A. G. Kästner —.

§. 17.

Nach einem solchen Vorgänger wird dann der starke Ausdruck des Hrn. Hofr. Karsten mich nicht abschrecken dürfen, auch die übrigen Gründe, welche er für seine Behauptung anführt, näher zu beleuchten. Er fährt a. a. O. §. 37. also fort: „Wenn das ∞ noch größer, wenn es 2mal, 3mal „und mehrmal größer werden könnte, so würde „folgen, daß auch die Null noch bis auf die „Hälfte abnehmen, daß sie 3mal und mehrmal „kleiner werden könnte, als sie vorher war. „Wollte man sich $\frac{1}{2}\infty$, als die Hälfte des Unendlichen, $\frac{1}{3}\infty$ dreymal kleiner als ∞ vorstellen, „so müßte $\frac{1}{2}\infty = \frac{1}{2 \cdot 0}$, $\frac{1}{3}\infty = \frac{1}{3 \cdot 0}$ seyn, und „2mal Nichts, 3mal Nichts müßte mehr als „Nichts seyn, welches von selbst wegfällt.„ Auf diesen Beweisgrund scheint Hr. Hofr. Karsten sich so zu stützen, als ob er ganz unwidersprechlich gewiß und unleugbar wäre. Allein es ist nur schlimm, daß derselbe außerordentlich unlogisch ist. Denn wer annimmt, daß das ∞ 2mal, 3mal und mehrmal größer werden könne, der muß auch, wenn er das einfache Unendliche ∞ nennt, das doppelte 2∞, das dreyfache 3∞, und das nfache $n\infty$ nennen. Wollte er sich nun $\frac{1}{2}\infty$ als die Hälfte von ∞, $\frac{1}{3}\infty$ als den dritten Theil

 von

von ∞ und $\frac{1}{n}\infty$ als den nten Theil von ∞ vorstellen, so würde er sich freilich widersprechen, weil er ∞ als ein einfaches nicht weiter theilbares Unendliches angenommen hat. Aber so wird doch wol auch niemand verfahren, sondern der Voraussetzung zu Folge wird er so schließen: ∞ ist die Hälfte von 2∞, der dritte Theil von 3∞, der nte Theil von $n\infty$, und wer diese Folge leugnen will, der muß erst beweisen, daß, wenn $a=2b$ ist, b nicht $\frac{1}{2}a$, wenn $a=3b$ ist, b nicht $\frac{1}{3}a$, und wenn $a=nb$ ist, b nicht $\frac{1}{n}a$ sey. Nun setze man ferner das vorhin angenommene einfache Unendliche $\infty=\frac{1}{0}$, so muß auch $2\infty = 2\cdot\frac{1}{0}$, $3\infty=3\cdot\frac{1}{0}$, $n\infty=n\cdot\frac{1}{0}$ seyn. Wollte man sich nun hier mit Hr. Karsten $\frac{1}{2}\infty$ als die Hälfte von $\frac{1}{0}$, d. i. als $\frac{1}{2\cdot 0}$ vorstellen, so widerspräche man sich wieder eben so, wie vorhin, weil man $\infty=\frac{1}{0}$ als ein einfaches untheilbares Unendliches angenommen hat. Wollte dagegen jemand leugnen, daß $\frac{1}{0}$ die Hälfte von $2\cdot\frac{1}{0}$, der dritte Theil von $3\cdot\frac{1}{0}$ und der nte Theil von $n\cdot\frac{1}{0}$ sey, nun so müßte er wiederum erst beweisen, daß $a=nb$ seyn könne, ohne daß $b=\frac{1}{n}a$ sey, und das wird Hr. Hofr. Karsten doch wol nicht beweisen wollen.

§. 18.

§. 18.

Hr. Hofrath Karsten hätte es leicht erkennen können, wie sehr sein Vorgeben: das Unendlichgroße sey nur eins, der ganzen Mathematik widerspricht. Er führt §. 35. selbst einige Beyspiele an, die dieses laut bezeugen. Indessen weiß er das, was seine Meinung geradezu umstößt, so sinnreich zu wenden, daß es dieselbe sogar zu bestätigen scheint. So ist bekanntermaaßen allemal $\sec.\alpha = \sqrt{(1 + \tang.\alpha^2)}$, also $\frac{\sec.\alpha}{\tang.\alpha} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tang.\alpha^2}\right)}$. Wird nun der Winkel $\alpha = 90^\circ$, so wird so wohl $\tang.\alpha$ als $\sec.\alpha$ unendlich groß, folglich $\frac{1}{\tang.\alpha} = \frac{1}{\infty} = 0$, also $\frac{\sec.\ 90^\circ}{\tang.\ 90^\circ} = 1$. Eben so, wenn $y = ax^2 + bx + c$, und $z = fx^2$ ist, so ist $\frac{y}{z} = \frac{ax^2 + bx + c}{fx^2} = \frac{a + b:x + c:x^2}{f}$. Setzt man hier $x = \infty$, so wird so wohl y, als z unendlich groß; dagegen verschwinden $b:x$ und $c:x^2$, und es wird $\frac{y}{z} = \frac{a}{f}$, also wird, wenn man $a = 100f$ setzt, $\frac{y}{z} = 100$. Nun wird doch

wol

wol jeder gesunde von den Künsten einer sophistischen Dialektik noch unverdorbene Verstand schließen: wenn diese Gleichungen wahr sind, so ist auch sec. $90^\circ =$ tang. 90°, und $y = 100 z$. Gleichwol erklärt Hr. Karsten diese Folge für unrichtig. „Man kann," sagt er, „vermöge dieser Formeln zwar so reden, als wenn das unendlichgroße y gegen das unendlichgroße z ein endliches Verhältniß hätte. Es kann heißen, Secante und Tangente des rechten Winkels werden gleich groß —. Aber das ist nur kurze analytische Sprache; die richtige der Sache angemessene Sprache ist, des Verhältnisses sec. α : tang. α Gränze sey $= 1 : 1$, des Verhältnisses $y : z$ Gränze $= 100 : 1$." Und woher denn das? „Daher," sagt Hr. K., „weil gerade alsdenn, wenn zwo Größen aufhören, endlich zu seyn, alle Vergleichung, mithin alle Rechnung wegfällt. Denn wenn man z. B. wie §. 31. $y = ax + bx^2$ und $z = fx$ setzt, so wird in dem Verhältnisse $\frac{y}{z} = \frac{ax + bx^2}{fx}$ so wohl y als $z = 0$, wenn man $x = 0$ setzt, und $\frac{y}{z} = \frac{a}{f}$. Nun kann man, sagt er, hier nicht weiter fragen, wievielmal z in y, d. i. die untere Null in der obern, enthalten ist, weil es sich von selbst versteht, daß alle Nullen einerley sind, und weiter keine Größe haben, die man vergleichen könnte,

son-

sondern man will nur die Gränze des Verhältnisses $\frac{y}{z}$ wissen, d. i. denjenigen Exponenten desselben, der für den Fall $x = 0$ gilt. Eben so, schließt er, findet auch in den obigen Verhältnissen $\frac{\sec. 90^0}{\tang. 90^0} = 1$, und $\frac{y}{z} = 100$, da die genannten Größen alle vier unendlich groß werden, keine weitere Vergleichung derselben mehr statt, sondern man will nur die Gränze der Verhältnisse $\frac{\sec. \alpha}{\tang. \alpha}$, und $\frac{y}{z} = \frac{ax^2 + bx + c}{fx^2}$, wo $a = 100 f$ ist, d. i. ihren Exponenten für den Fall wissen, wenn $\tang. \alpha$ und $x = \infty$ werden. Allein ohne mich hier in die subtile Untersuchung, was es mit der Grenze $\frac{y}{z} = \frac{a}{f}$, wenn z, y beide $= 0$ sind, eigentlich für eine Bewandtniß hat, einzulassen, indem dieses schon in meiner Dissertation de Geometria acustica, nec non de ratione 0:0 ceu basi calculi differentialis. Regiom. 4. 1787. geschehen ist, und künftig noch umständlicher geschehen soll, will ich nur so wohl in Ansehung der vermeinten Aehnlichkeit, welche Hr. Karsten zwischen den Verhältnissen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ zu finden glaubt, als der Vorstellung, die er von der Sache überhaupt macht, folgendes bemerken:

1. Hier

1. Hier gilt wieder eben das, was Hr. Hofrath Kästner in der vorhin angeführten Note erinnert: Bei $2 \cdot 0$, $3 \cdot 0$ denkt man nichts anders, als bei $1 \cdot 0$; aber bei $2 \cdot \infty$, $100 \cdot \infty$ denkt man gewiß was anders, als bei $1 \cdot \infty$. Man kann also freilich nicht sagen: im Verhältnisse $\frac{y}{z} = \frac{0}{0} = \frac{100}{1}$ ist $y = 0$ hundertmal größer, als $z = 0$. Aber das ist doch gewiß was anders, wenn man sagt: im Verhältnisse $\frac{y}{z} = \frac{100 \cdot \infty}{1 \cdot \infty} = \frac{100}{1}$ ist $y = 100 \cdot \infty$ hundertmal größer, als $z = 1 \cdot \infty$.

2. Sehr richtig ist es, daß $\frac{\sec. 90^\circ}{\tang. 90^\circ} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{1}$ die Grenze des Verhältnisses $\frac{\sec. \alpha}{\tang. \alpha} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tang. \alpha^2}\right)}$ d. i. derjenige Exponent ist, den es bekommt, wenn $\alpha = 90^\circ$ wird, imgleichen daß $\frac{y}{z} = \frac{a}{f}$ die Grenze des Verhältnisses $\frac{y}{z} = \frac{a + b : x + c : x^2}{f}$ d. i. derjenige Exponent ist, den es bekommt, wenn $x = \infty$ wird. Allein wenn nach Hr. Karsten für den Fall $\alpha = 90^\circ$ zwischen $\sec. \alpha$ und $\tang. \alpha$, und für den Fall

$x = \infty$ zwischen y und z keine Vergleichung, mithin auch keine Rechnung mehr stattfindet, so findet doch natürlich zwischen ihnen auch kein Verhältniß, mithin auch kein Exponent mehr statt. Also sind nach der Behauptung des Hrn. Karsten die Grenzen der angeführten und anderer solcher Verhältnisse Exponenten, von Verhältnissen, die nicht mehr Verhältnisse sind, d. i. Exponenten, die keine Exponenten sind, also Chimären und Widersprüche. Und so würde die Sprache, die er für richtig und der Sache angemessen erklärt, eben so chimärisch und unrichtig seyn, als diejenige, die er kurze analytische Sprache nennt und nur für leidlich wahr erklärt.

3. Um nur auch den kleinsten Gedanken, daß ein unendlich großes gegen ein anderes ein endliches Verhältniß haben könne, durch alle mögliche Kunstgriffe der Dialektik ganz aus dem Grunde weg zu vernünfteln, erlaubt Hr. Karsten nicht einmal, im eigentlichen wahren Sinne zu sagen, daß $\frac{\infty}{\infty} = 1$, also $\infty = \infty$ sey, da doch nach seiner Behauptung das ∞ nur eins, also das eine ∞ ganz einerley mit dem andern ∞ ist. Obgleich nach seinem eigenen Geständnisse ganz richtig folgt, daß $\frac{\text{sec. } 90^0}{\text{tang. } 90^0} = \frac{1}{1}$ ist, so ist es ihm doch Ketzerey, oder Ignoranz, im wahren Sinne zu behaupten, daß die unendliche Secante und Tangente eines rechten Winkels im Verhältnisse

nisse der Gleichheit stehen, und daß sie also beide gleich groß sind. Nun trägt es sich aber sonderbarer Weise zu, daß eben dieselbe unendliche gerade Linie, welche die Tangente eines Winkels von 90° ist, auch zugleich die Secante eines Winkels von 90° seyn kann. Denn man ziehe z. B. (Fig. I.) mit einerley Halbmesser CA die Quadranten AE und CD, so ist AB die Tangente und CF die Secante des rechten Winkels ACF, zugleich aber ist AB die Secante, und CF die Tangente des rechten Winkels CAB. Also ist die unendliche Linie AB zugleich die Tangente und Secante eines Winkels von 90°, und eben dieses gilt auch von der unendlichen Linie CF. Nun aber kann man, nach Hr. Karsten, ob er gleich das Unendlichgroße für eine wahre Größe hält, nicht im wahren Sinne sagen, daß sec. 90° = tang. 90° ist. Also kann man auch nicht im wahren Sinne sagen, daß AB = AB, und CF = CF, d. i. daß jede Größe ihr selber gleich sey, sondern, wer ein gründlich und richtig denkender Mathematiker seyn will, der muß es fortmehro zum ersten Grundsatz annehmen, daß nicht immer A = A seyn dürfe, sondern daß A auch non - A seyn könne.

§. 19.

So sinnreich also auch die Analogie ist, welche Hr. Hofr. Karsten zwischen der Null und dem Unendlichen festzusetzen sucht, so ist sie doch ganz grund-

grundlos, und es ist überhaupt eine eben so unnütze Bemühung, aus dem bloßen Begriffe des Unendlichgroßen herleiten zu wollen, daß dasselbe nur eins sey, und daher zugleich die Vorstellung des Allergrößesten in sich fasse, als wenn man bloß aus demselben darthun wollte, daß ein Unendlichgroßes wirklich größer sey, als das andere. Der Begriff desselben allein bestimmt weder das eine, noch das andere, denn dieser sagt nichts weiter, als: wer sich eine unendlich große Größe vorstellt, der denkt was größeres, als jede endliche Größe von eben der Art beträgt; wer sich eine unendliche Menge vorstellt, der denkt sich eine Menge, die jede Zahl übertrifft. Ob nun aber eine unendlichgroße Größe und Menge nur einmal, oder ob sie mehrmal, ja vielleicht wieder unendlich viele male genommen werden könne, das ist eine Frage, die sich nicht aus der bloßen Analysirung des Begriffs vom Unendlichen entscheiden läßt, sondern hier kommt es erst auf die Untersuchung an, ob es auch in der That unendlich große Größen giebt. Giebt es dergleichen nicht, so ist der Begriff des Unendlichgroßen ein bloßes Hirngespinst, und denn steht es der Phantasie eines jeden frey, ob sie sich nur eins oder mehrere erdichten will. Giebt es aber unendlich große Größen, so kann es bloß die Natur und Beschaffenheit derselben entscheiden, ob das Unendlichgroße zugleich das Allergrößeste sey, oder nicht. In der Kantschen Sprache würde dieses kurz so heißen:

die Sätze, von denen hier die Frage ist, sind nicht analytische, sondern synthetische Sätze.

§. 20.

Bis hieher habe ich den Begriff, den wir uns vom Unendlichgroßen machen, bloß analysirt, und zu entwickeln gesucht, was derselbe in sich faßt, was ihm widerspricht, und was er noch unbestimmt und unentschieden läßt, ohne übrigens auf seine Möglichkeit und Realität die mindeste Rücksicht zu nehmen. Jetzt frägt es sich also: hat dieser Begriff auch objective Realität, oder ist er etwa ein bloß leerer Begriff ohne Inhalt und Bedeutung, nur zum Behuf des Calculs erdichtet, ja wol gar ungereimt und sich selbst widersprechend? Ein Begriff hat objective Realität, wenn ihm irgend ein Gegenstand entspricht. So ist z. B. der Raum kein erdichteter und leerer, sondern ein realer Begriff, denn er hat seine Gegenstände, auf die er sich bezieht, indem wir uns alle äußerliche Dinge, wir mögen sie als wirklich, oder bloß als möglich denken, nothwendig im Raum vorstellen müssen. Also will die Frage eigentlich soviel sagen: giebt es auch unendlich große Dinge, d. i. sind auch in der That Größen möglich, die wir uns größer, als jede endliche Größen, vorstellen müssen? Die Beantwortung dieser Frage scheint sich schon aus dem Begriffe der Mehrheit, Vielheit oder Menge zu ergeben, der doch unleugbar kein chimärischer oder leerer, son-

dern realer Begriff ist. Denn keine Zahl, d. i. keine endliche Menge von Einheiten, ist die größeste, sondern so groß wir sie auch annehmen mögen, so können wir doch noch immer eine größere Menge denken. Also ist die Menge, nach dem ganzen Umfange ihrer Möglichkeit betrachtet, größer als jede endliche Menge, d. i. die mögliche Menge von Einheiten ist unendlich groß. Auf diese Art scheint also die Realität des Begriffs vom Unendlichgroßen schon daraus zu folgen, weil die Reihe 1 + 1 + 1 + 1 u. s. w. keine Grenze hat, sondern ohne Ende fortgesetzt werden kann. Allein wenn man die Sache genau erwägt, so folgt hieraus zwar schon, daß das Unendlichgroße kein willkührlich erdichteter, und noch weniger ein sich selbst widersprechender, sondern vielmehr ein nothwendiger Begriff ist, den die Vernunft, weil sie sich keine endliche Menge von Einheiten zur unübersteiglichen Grenze setzen kann, sich zu ihrer eigenen Befriedigung schlechterdings bilden muß, und daß er also in so fern als eine **nothwendige Vernunftidee** allerdings subjective Realität hat, mithin dieses auch von allen unendlichen arithmetischen Reihen gilt, z. B. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots\ldots$ Indessen bleibt hier noch immer die Frage übrig, ob dieser Idee auch in der That ein Gegenstand correspondirt, oder ob sie nicht vielleicht eine bloße Idee sey, welche die Vernunft sich lediglich darum bildet, weil sie sonst gar kein regulatives Princip haben würde, bis wie weit sie in der Reihe der Ein-

heiten fortzugehen berechtigt wäre. Denn Zahl und Menge sind bloß abstracte Begriffe, die sich der Verstand erst durch Vergleichung gewisser angenommener Dinge, die der Mathematiker Größen (quanta) nennt, bildet. Wir nennen nemlich jedes Ding für sich ein Ding. Ist nun A ein Ding, B gleichfalls, und eben so auch C, D u. s. w.; so denken wir unter A, B, C, D u. s. w. zusammengenommen, mehrere Dinge, oder eine Vielheit, eine Menge von Dingen. Also setzt der Begriff der Menge oder Vielheit gewisse Dinge oder Größen voraus, von denen derselbe prädicirt wird, und von denen man, weil sie bloß als Dinge betrachtet alle von einerley Art sind, eine jede als Einheit d. i. als das Maaß aller übrigen betrachtet. Gesetzt demnach, es gäbe keine Dinge oder Größen, die man zur Einheit oder zum Maaße annehmen könnte, oder gesetzt, es wäre nur ein Ding möglich, so wäre Menge ein nichtsbedeutender leerer Begriff. Menge oder Vielheit sind aber unbestimmte Begriffe. Bestimmt man nun, wievielmal man das Ding a, das man Einheit oder Maaß nennt, oder wievielmal man einen gewissen aliquoten Theil desselben nehmen muß, wenn man die Größe eines andern Dinges b erhalten will; so kommt man erst auf den Begriff der Zahlen, und zwar im ersten Fall auf die ganzen, im letztern aber auf die gebrochenen Zahlen, und eben hiedurch wird zugleich das Ding b durch das Ding a als durch sein Maaß

ge-

gemessen. Nemlich wenn $b = a$ ist, so sagen wir nun: b enthält a 1mal. Ist $b = a + a$, so sagen wir: b ist 2mal so groß, als a, und a ist der 2te Theil von b. Ist $b = a + a + a$, so sagen wir: b ist 3mal so groß, als a, und a ist der 3te Theil von b. Auf diese Art erzeugt sich der Verstand nach und nach alle ganze Zahlen. Nehmen wir nun ferner n für jede ganze Zahl an, und $\frac{a}{n}$ für den nten Theil von a, so sagen wir, wenn $b = \frac{a}{n}$ ist, b ist so groß, als $1 \frac{a}{n}$ oder $\frac{1}{n} a$. Ist $b = \frac{a}{n} + \frac{a}{n}$, so sagen wir, b ist so groß, als $2 \frac{a}{n}$ oder $\frac{2}{n} a$, und so erzeugen wir wieder in unserm Verstande alle gebrochene Zahlen. Gäbe es also keine zählbare Dinge, so wären auch alle Zahlen leere nichtsbedeutende Vorstellungen, und die ganze so wohl gemeine als höhere Arithmetik (unter letzterer verstehe ich nicht nur die eigentliche Algebra, sondern auch die Differential- und Integral-Rechnung ohne Anwendung auf wirkliche Größen,) wäre in diesem Fall ein bloßes Gedankenspiel oder eine leere Uebung und Belustigung des Verstandes. Die Begriffe der Einheit und Mehrheit, aus deren Bestimmung die Zahlen entstehen, sind also zwar reine von aller

Erfahrung unabhängige Verstandesbegriffe, oder Categorien, aber eben daher nichts weiter, als wofür sie Hr. Kant ausgiebt, nemlich die Form, nach welcher wir allein von der Quantität der Dinge urtheilen können, folglich sind sie auch nur so fern objectiv gültig, so fern Dinge oder Größen möglich sind, auf welche man sie beziehen kann. Eben daher ist auch die Idee einer unendlichen Menge nichts weiter, als die Form, nach welcher allein die Vernunft ihrem Erkenntnisse von der Menge Totalität oder Vollständigkeit geben, und sich bis zur Allheit erheben kann, wofern anders im Erkenntnisse der Menge Allheit möglich ist. So unleugbar also auch die subjective Gültigkeit der Idee einer unendlichen Menge ist, indem dieselbe für unsere Vernunft ein unentbehrliches Regulativ ist, ihre Kenntnisse von der Quantität der Dinge aufs möglichste zu erweitern; so bleibt doch noch immer die Frage, ob sie auch objective Realität hat, d. i. ob es auch Dinge oder Größen giebt, in welchen eine angenommene Einheit mehrere male enthalten ist, als jede Zahl beträgt, oder ob nicht vielleicht eine unendliche Menge so was ist, was gar keinen Sinn hat, und wobei sich außer dem Zeichen ∞, womit man es ausdruckt, gar nichts weiter denken läßt. Und so ist klar, daß die objective Gültigkeit des Begriffs des Unendlichgroßen sich nicht aus arithmetischen Principien herleiten läßt, sondern daß es hier lediglich auf die Natur der Dinge oder Größen selbst an-

ankommt, die wir zählen können, und deren besondere Beschaffenheit uns bekannt ist.

§. 21.

Wir kommen also wieder auf die Frage zurück: giebt es auch unendlich große Größen, d. i. Dinge, die jeden endlichen Theil von ihnen unendlich viele male enthalten? Außer der Menge und Zahl, die hier nichts entscheidet, ist die Hauptgröße, mit welcher sich die reine Mathematik beschäftigt, und deren sie sich zum Maaße aller übrigen bedient, der **Raum**. Die Vorstellung, die wir von diesem haben, bekommen wir, wie schon §. 8. no. 3. gezeigt worden, nicht erst auf dem Wege der Erfahrung durch wirkliche Empfindung der äußern Gegenstände, also auch nicht durch einen von diesen abgezogenen allgemeinen Begriff, sondern sie ist uns durch die Natur unserer Sinnlichkeit unmittelbar gegeben. Nach dieser ursprünglichen unabänderlichen Vorstellung, die wir vom Raum haben, ist derselbe eine concrete Größe, ein einzelnes stetiges Ding, das wir durch unmittelbare Anschauung kennen, und das wir daher schlechterdings gezwungen sind nach allen seinen Qualitäten nur gerade so zu denken, wie diese uns durch die reine Anschauung desselben vorgestellt werden. Selbst die ausschweifendste Phantasie ist daher nicht im Stande, sich einen Raum von anderer Art, als der wahre ist, auch nur zu erdichten, so wenig als sie sich eine Empfindung vor-

stellen kann, die von derjenigen unterschieden ist, welche wir durch unsere Sinne erhalten, da es ihr doch ein leichtes ist, in solchen Fällen, wo es auf bloße Abstraction, nur auf Menge und Zahl, oder auf Verbindung und Absonderung ankommt, in ihren Erdichtungen ins Unendliche zu schwärmen. Der Dichter kann sich ohne Mühe Sylphen und Gnomen, Cyclopen und Centauren schaffen. Der Arithmetiker kann sich, ohne sich an seinen abstracten Begriff von Potenzen und Wurzeln zu kehren, Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten, ja so gar widersprechende und unmögliche Zahlen, als $\sqrt{-1}$ erdichten, und sie mit Vortheil in seinen Rechnungen gebrauchen. Allein die uns gegebene concrete Vorstellung vom Raum abzuändern, und z. B. einen Raum von vier Abmessungen, einen Raum von andern Grenzen, als Flächen, Linien und Punkten, eine zweyseitige geradlinichte Figur, von einem Punkte zum andern mehr als Eine gerade Linie, durch drey Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, mehr als Eine Ebene u. s. w. zu denken, dazu ist auch die stärkste Phantasie unfähig. In der Vorstellung des Raums und seiner Eigenschaften ist also nichts unserer Willkühr überlassen, sondern alles so unabänderlich, als in den Empfindungen, die wir durch unsere Sinne bekommen, und dieses ist eben der wahre Grund, der den Mathematiker berechtigt, die geometrischen Axiomen und Postulate mit der größesten Sicherheit vor=

vorauszusetzen, ohne von irgend einem Vernünftigen, so bald er nur ihren wahren Sinn gefaßt hat, den kleinsten Zweifel an ihrer Richtigkeit zu besorgen. Nun ist unsere Vorstellung vom Raum von der Art, daß wir nicht nur unter dem eigentlichen körperlichen Raum eine Ausdehnung denken, die nach allen möglichen Seiten ohne Ende fortgeht, sondern auch jede ebene Fläche, wodurch wir ihn begrenzen, als ringsum, und jede gerade Linie, wodurch wir diese begrenzen, als nach beiden Seiten ohne Ende fortgehend uns vorstellen müssen, und diese Vorstellung ist so nothwendig, daß es selbst unserer Phantasie schlechterdings unmöglich ist, sich einen Raum einzubilden, der irgendwo gänzlich aufhörete, so leicht es ihr auch ist, die Körper selbst aus dem Raum wegzudenken, und sich in letzterm eine Grenze vorzustellen, wo die ganze Körperwelt aufhörete. Allein unter einem körperlichen Raum, einer Fläche und Linie, die wir als ohne Ende fortgehend denken, denken wir etwas Größeres, als jedes gleichartige endliche Ding beträgt. Also sind wir schlechterdings gezwungen, so wohl den körperlichen Raum, als auch jede ebene Fläche und gerade Linie als unendlich große Größen zu denken (§. 7.). Hierauf gründet sich eben die unmittelbare Evidenz und Gewißheit der Postulate, daß jede endliche gerade Linie nach beiden Seiten, jede endliche Ebene ringsum, jeder endliche körperliche Raum nach allen möglichen Seiten ohne Ende ver-

längert werden könne; denn wie wollte man mit Sicherheit behaupten, daß z. B. jede endliche gerade Linie sich nach beiden Seiten immerfort verlängern lasse, wofern nicht von einer geraden Linie überhaupt bereits die Vorstellung in uns zum Grunde läge, daß ihre Ausdehnung nach keiner von beiden Seiten aufhöre, sondern was ohne Ende fortgehendes und Unendlichgroßes sey. Was vom Raum gilt, gilt auch von der Zeit; diese ist die Form, unter welcher unser innerer Sinn uns alle seine Gegenstände, nemlich alle Bestimmungen unsers innern Zustandes, darstellt, so daß wir sie schlechterdings nicht anders, als entweder zugleich vorhanden, oder auf einander folgend, d. i. nicht anders, als in der Zeit denken können; mithin ist die Zeit eben daher keine leere chimärische Vorstellung, sondern eine solche, die ihre völlige objective Realität hat. Eben daher aber, weil alle Empfindungen und Wahrnehmungen unsers innern Zustandes schon die Vorstellung der Zeit, als ihre nothwendige Form, voraussetzen, ist die Zeit eben so wenig als der Raum ein allgemeiner Begriff, den wir uns erst auf dem Wege der Erfahrung durch Abstraction bilden, sondern sie ist gleichfalls eine concrete Größe, ein einzelnes stetiges Ding, das uns vermöge der Natur unsers innern Sinnes durch reine Anschauung unmittelbar gegeben ist, und das wir gerade so, wie es uns gegeben ist, ohne die mindeste Abänderung uns vorzustellen gezwungen sind. So wenig wir

uns

uns im Raum irgend eine Lücke, andere Grenzen, als Flächen, Linien und Punkte, und daher mehr als drey Abmessungen denken können; so wenig kann auch die schwärmendste Phantasie sich eine Lücke in der Zeitfolge, oder eine andere Grenze in ihr, als Zeitpunkte, die wir Momente oder Augenblicke nennen, oder mehr als eine Abmessung in ihr denken, und sie daher in Vergleichung mit dem Raum anders als durch eine Linie construiren. Aber so wenig wir uns den Raum als irgendwo aufhörend denken können, so wenig geht dieses auch bei der Zeit an, sondern wie wir uns nothwendig den ganzen möglichen Raum als nur Einen unendlichen, und jede gerade Linie als nach zwo entgegengesetzten Seiten ohne Ende fortgehend, mithin unendlich groß vorstellen müssen, so sind wir auch unumgänglich gezwungen, uns die ganze mögliche Zeitfolge als nur eine so wohl rückwärts als vorwärts ohne Ende fortgehende, mithin unendlich große Größe zu denken. Also kennen wir in der That zwo verschiedene Arten von unendlich großen Größen, die uns als die beiden unabänderlichen Formen aller möglichen Gegenstände unserer Sinnlichkeit, mithin als concrete, einzelne und stetig ausgedehnte Dinge durch die Natur unserer Sinnlichkeit unmittelbar gegeben sind, nemlich den Raum und die Zeit. Der Raum stellt uns drey verschiedene unendlich große Größen dar, denn er ist nicht nur als ein vollständiger körperlicher Raum unendlich groß, sondern selbst

unter seinen drey möglichen Grenzen hat er zwo unendlich große Größen, nemlich unendlich große Flächen und Linien. Die Zeit aber liefert uns nicht mehr als eine besondere unendlich große Größe, und diese hat zugleich die merkwürdige Beschaffenheit, daß, ungeachtet sie bereits an sich eine reine Anschauung ist, der Grad ihrer intuitiven Klarheit doch außerordentlich erhöhet wird, wenn man sie durch eine gerade Linie darstellt, die ein bewegter Punkt beschreibt. Und so ist wol die objective Realität des Begriffs vom Unendlichgroßen durch den Raum und die Zeit außer allen Zweifel gestellt.

§. 22.

Wo Raum ist, da müssen auch äußerliche Dinge entweder wirklich seyn, oder wenigstens seyn können, und wo Zeit ist, da müssen auch Dinge entweder wirklich auf einander folgen, oder wenigstens folgen können. Denn da Raum und Zeit keine vor sich bestehende Gegenstände außer uns, sondern nichts weiter sind, als die beiden subjectiven Formen unserer Sinnlichkeit, d. i. diejenigen beiden reinen Vorstellungen in uns, ohne welche wir gar keine sinnliche Vorstellung von irgend einem wirklichen oder möglichen Gegenstande haben können, so haben sie nur so fern objective Realität, in so fern sinnliche Gegenstände möglich sind, auf die sie sich beziehen können. Gesetzt nun, es existirten nur in einem Theil des Raums äußere Dinge, der übrige aber wäre nicht nur leer, son-

dern es wären auch weiter keine äußere Dinge, die ihn erfüllen könnten, möglich, sondern hier wäre die äußerste Grenze für die Möglichkeit äußerer Dinge; so wäre für diesen Theil des Raums auch keine Beziehung auf äußere Dinge möglich, also hätte nur ein Theil des Raums objective Realität, der übrige aber wäre eine leere nichtsbedeutende chimärische Vorstellung. Eben so setze man, ein Theil der Zeit wäre wirklich mit auf einander folgenden Dingen erfüllt, für den übrigen aber wären nicht einmal Dinge möglich, die ihn nach und nach erfüllen könnten, oder bereits hätten erfüllen können; so wäre gleichfalls ein Theil der Zeit eine reale, und der übrige eine bloß chimärische Vorstellung. Da also hieraus die Ungereimtheit folgen würde, daß die subjectiven Formen unserer Sinnlichkeit, von denen doch jede nur eine stetige concrete Vorstellung ausmacht, was reales und chimärisches zugleich wären, so ist klar, daß entweder der wirkliche Umfang der sinnlichen Dinge, oder doch wenigstens das Gebiet ihrer Möglichkeit sich eben so weit erstrecken muß, als das mögliche Gebiet des Raumes und der Zeit. Diese aber sind unendlich groß (§. 21.). Allein eine endliche Menge sinnlicher Dinge kann weder durch ihr Zugleichseyn den ganzen unendlichen Raum, noch durch ihre Folge die ganze unendliche Zeit erfüllen. Also muß erstlich entweder die wirkliche, oder wenigstens die mögliche Menge der äußern Dinge unendlich groß seyn, und zweitens muß entweder

die wirkliche Menge der Dinge, die bis auf diesen Augenblick auf einander gefolgt sind, und noch künftig auf einander folgen werden, unendlich groß seyn, oder es muß dieses wenigstens von der möglichen Menge der Dinge gelten, die theils bis jetzt schon hätten erfolgen können, theils noch künftig erfolgen könnten. Ob nun die wirkliche Menge der coexistirenden und successiven Dinge unendlich groß sey, d. i. ob die Körperwelt sich eben so weit, als der unendliche Raum selbst erstrecke, oder ob sie irgendwo aufhöre, imgleichen ob man in der Folge der Dinge, die bereits existirt haben, eben so ins Unendliche zurückgehen könne, als in der Vorstellung der verflossenen Zeit; dies ist eine Untersuchung, die den Mathematiker nicht interessirt, und die er ganz der Speculation des Metaphysikers überläßt. Dieser aber mag sich entweder für das eine oder für das andere, oder für keins von beiden erklären, sondern die ganze Frage als sich selbst widersprechend ansehen; so folgt doch aus dem vorhin Erwiesenen, daß wenigstens das Gebiet der **Möglichkeit** sinnlicher Dinge keine Grenzen kennt, und daß also die mögliche Menge so wohl der coexistirenden als successiven Dinge schlechterdings unendlich groß sey. Und so ist durch die Natur des Raums und der Zeit auch zugleich die objective Realität des Begriffs einer unendlich großen **Menge** entschieden. Aber da es außer dem Raum und der Zeit keine andere unendliche Größe giebt, die ein Object der Mathe-

matik seyn könnte, indem die Unendlichkeit des allervollkommensten Wesens über alle Meßkunst unendlich erhaben ist; so folgt zugleich eben hieraus, daß die Realität des Begriffs einer unendlichen Menge nur so weit geht, als er sich durch Raum und Zeit darstellen läßt. Und da ferner die Zeit selbst sich durch eine unendliche Linie darstellen läßt, so folgt hieraus endlich, daß die Realität der unendlich großen Menge sich nur gerade so weit erstreckt, als sie einer Darstellung im unendlichen Raume fähig ist.

§. 23.

Um die Realität des Begriffs einer unendlichen Größe und Menge mit der möglichsten Schärfe darzuthun, habe ich selbst die eigentliche Natur des Raums und seine objective Realität so genau als möglich darzustellen gesucht, obgleich dieses schon außerhalb den Pflichten des Geometers liegt. Denn dieser setzt nicht nur den Begriff des Raums als bekannt voraus, sondern ist auch unbekümmert, ob irgend ein Gegenstand dasey, auf welchen er seine Linien und Flächen oder seinen körperlichen Raum anwenden könne, oder nicht. Der Raum ist seine **Urgröße**, alle übrige Dinge sind ihm nur so fern Größen, so fern sie gleichsam Abdrücke von dieser sind. Was sich im Raum darstellen läßt, das ist für den Geometer wahre reale Größe, ohne weiter zu fragen, ob so was in der Natur existiren könne, oder nicht. Für ihn ist

daher

daher die Realität des Unendlichgroßen schon erwiesen, so bald die Unendlichkeit des Raums erwiesen ist. Diese aber ist, wie Hr. Karsten (math. Abh. S. 15. §. 15.) sehr wohl bemerkt, schon daraus klar, weil im Begriff von einer ausgedehnten geometrischen Größe nichts liegt, das uns nöthigte, zugleich an den Umstand mit zu denken, ob sie begrenzt, oder vielleicht wenigstens zum Theil unbegrenzt sey. Der Begriff vom geometrischen Raum überhaupt, sagt er, ist ja nicht der Begriff von der Kugel, der Pyramide, vom Würfel, vom Kegel u. s. w. Der Begriff vom Flächenraum ist nicht der Begriff vom Dreyeck, vom Kreise, von der Ellipse u. s. w., also ist der Begriff von einer Länge auch nicht der Begriff von einer Linie mit festgesetzten Grenzen. So richtig indessen dieses ist, so kann es doch, wenn man hiebei stehen bleibt, leicht den Schein haben, als ob die Unendlichkeit des Raums eine bloß willkührliche Annahme der Geometer wäre, und wie manche Verwirrung in den Grundbegriffen kann nicht hiedurch veranlaßt werden! Um sich hievon zu überzeugen, darf man nur die weitere Wendung ansehen, welche Hr. Karsten der Sache giebt. „Sonst, fährt er fort, lehren die Philosophen, daß alle solche Begriffe, welche man den Gründen der Vernunftlehre gemäß abstracte Begriffe nennt, nur für die intellectuelle, nicht für die wirkliche Welt gehören, und daß es die Unmöglichkeit des Begriffes nicht beweisen würde, wenn

man einwenden wollte, der Begriff sey so, wie ihn der Philosoph in Gedanken bildet, in der wirklichen Welt nicht vorhanden. Selbst die ersten Grundbegriffe der Geometrie, woran sich niemand stößt, sind ja dergleichen abstracte Begriffe. Ein Raum ohne Materie, die ihn ausfüllt, eine Fläche ohne Raum, den sie begrenzt, eine Linie ohne Fläche, wovon sie vielleicht einen Theil des Umfangs oder den ganzen Umfang ausmacht, ein Punct für sich allein, ohne eben als Anfangs- oder Endpunct einer Linie gedacht; das alles sind Vorstellungen im Verstande, die man gelten läßt. Wenn man aber den Punct ohne die Linie, die sich damit anfängt oder endiget, denken kann, warum auch nicht die Linie ohne Anfangs- oder Endpunct?„ Die Meinung, daß Raum ein abstracter Begriff sey, ausgenommen, ist alles dieses ganz richtig, „so richtig,„ sagt Herr Hofrath **Kästner** a. a. O. in der Note d zu dieser Stelle, „daß ich nicht gedacht hätte, es könnte „jemand dieses leugnen, wie doch wol geschehen „seyn muß, weil Hr. Karsten es bestätigt. Eu„klid's zweyte Foderung enthält ja, daß man jede „gerade Linie, so lang man will, denken kann. „Und die ganze Geometrie gehört zur intellectuel„len Welt, wo alles wirklich ist, was aus Be„griffen folgt.„ Allerdings ist für den Geometer alles wirklich, was aus unsern natürlichen Begriffen vom Raum folgt, ohne daß er sich beunruhigen darf, ob so was in der materiellen Welt

dasey, oder seyn könne, und das Unendlichgroße für einen unmöglichen, widersprechenden Begriff halten, heißt also im Grunde eben so viel, als den Raum selbst dafür erklären. Allein wenn nun Hr. Karsten (§. 16.) allen jenen richtigen Behauptungen die Deutung giebt, die Unendlichkeit des Raums sey nichts weiter, als ein hypothetischer Begriff, den man bloß als Hülfsmittel zum Erfinden braucht, nur eine fictio hevristica, wie in der Mechanik die Begriffe von einem Körper, der nur einen schweren Punkt hat, und von einer unbiegsamen Linie ohne Schwere, und daher S. 432. die unendliche Größe nur für einen algebraischen Grundbegriff und ihren obgleich von den berühmtesten Männern beliebten Gebrauch in der Elementargeometrie §. 24. für Verdunkelung und Verunstaltung derselben erklärt, so hat er wol nicht bedacht, daß er hiedurch alle seine vorhin angeführte richtige Behauptungen wieder umstößt, und zugleich die Elementargeometrie selbst in bloße algebraische Rechnungssprache verwandelt. Denn, wenn er anfangs so richtig als schön sagt, unser Begriff vom Raum sey nicht der Begriff von der Kugel, von der Pyramide oder überhaupt von irgend einer begrenzten körperlichen Figur; so heißt dieses doch wol so viel: der Raum sey, nach unserm Begriffe, etwas völlig unbegrenztes, und wir bekommen daher den Begriff von einer Kugel, Pyramide u. s. w. bloß dadurch, daß wir einen Theil von ihm willkührlich begrenzen. Was ist also

in unserm Begriff vom Raum willkührlich? die Unbegrenztheit und Unendlichkeit desselben? oder seine auf unzählig mannigfaltige Arten mögliche Begrenzung? Ich dächte, aus dem, was Hr. Karsten hier selbst als richtig voraussetzte, folge doch wol die Bejahung für das letztere. Mir einen gewissen Theil im Raum vorzustellen, dessen Grenze die Gestalt einer Kugel bildet, dieses hängt, so weit ich mir meiner bewußt bin, bloß von meiner Willkühr ab. Aber mir einen Raum vorzustellen, der irgendwo absolut aufhört, d. i. mir den ganzen möglichen Raum unter irgend einer Figur, z. B. einer Kugel, Pyramide, eines Würfels u. s. w. als was begrenztes zu denken — das kommt so wenig auf meine Willkühr an, daß, wie ich schon §. 21. gezeigt habe, die willkührlichste Aufbietung der ganzen Einbildungskraft sich so was durchaus nicht erdichten kann. Diesem zu Folge muß die reine Wissenschaft des Raums, die Geometrie, schlechterdings die Unendlichkeit des Raums als eine nothwendige unabänderliche Eigenschaft desselben allem übrigen sogleich im ersten Anfange voraussetzen, wofern sie sich für befugt halten will, denselben so wohl, als die in ihm möglichen Flächen und Linien nach Gefallen zu begrenzen. Und so hat es auch Euklides, so haben es von je her alle Geometer wirklich gemacht, wenn sie gleich die Sache nicht mit ihrem wahren Namen nannten, sondern aus bloßem Mißverstand sich vor dem Ausdruck des Unendlichen fürchteten.

Denn Euklids Postulat, daß man jede gegebene gerade Linie, so weit man will, in Gedanken verlängern könne, setzt doch wol, wofern es in der That gegründet seyn soll, natürlich voraus, daß man sich in einer geraden Linie durchaus keinen Punkt als ihre äußerste absolute Grenze denken könne, sondern daß man sich dieselbe in ihrem ganzen möglichen Fortgange schlechterdings unbegrenzt d. i. unendlich groß denken müsse. Wäre daher die Unendlichkeit des Raums ein bloßer algebraischer Kunstbegriff, nur eine heuristische Fiction; so müßte man eben dieses auch von dem Postulate, eine gerade Linie, so weit man will, zu verlängern, und daher von allen Demonstrationen und Aufgaben der Elementargeometrie, die sich auf dasselbe gründen, gleichfalls behaupten; und so würde wol fast die ganze Euklideische Geometrie auf lauter algebraischen Fictionen beruhen.

§. 24.

Der Grund von Hr. Karstens unrichtiger Vorstellung, als ob die Unendlichkeit des Raums eine bloß nützliche Annahme des Algebraisten wäre, liegt also darin, daß er die wahre Natur des Raums verkennt, und die absolute **Nothwendigkeit**, denselben unbegrenzt und unendlich groß zu denken, in eine bloße **Möglichkeit** oder **Befugniß**, ihn so zu denken, verwandelt. Er meint nemlich, wir kämen zum Begriffe der Unendlichkeit des Raums dadurch, daß wir von seinen Grenzen abstra-

strahiren. Allein die Unrichtigkeit dieser Vorstellung ist leicht zu erkennen. Denn keine Grenze des Raums ist ein absolutes völliges Aufhören desselben, sondern sich einen völlig begrenzten Raum denken, heißt nichts anders, als sich im ganzen Raum einen gewissen bestimmten Theil desselben denken, der eben durch seine Grenze vom übrigen Raum unterschieden wird. Eine Grenze, durch welche ein endlicher Raum bestimmt wird, zeigt also nicht nur an, daß der Raum, der innerhalb ihr eingeschlossen ist, hier aufhört, sondern, daß da, wo dieser aufhört, zugleich der außerhalb ihr liegende anfängt, sie ist also allemal eine gemeinschaftliche Grenze des innerhalb und außerhalb ihr befindlichen Raums. So sind die beiden Endpunkte der geraden Linie AB (Fig. 2.) nicht nur die Grenzen von ihr, sondern zugleich von den außerhalb ihr liegenden Theilen AC, BD. So ist die Peripherie des Kreises nicht nur die Grenze seiner Fläche, sondern zugleich der ganzen außerhalb ihr liegenden Ebene. So ist die Oberfläche einer Kugel nicht nur die Grenze des innern Raums, den wir die Kugel nennen, sondern zugleich des ganzen außerhalb ihr liegenden Raums. Also ist es uns schlechterdings unmöglich, uns einen begrenzten Raum vorzustellen, ohne ihn in dem ganzen außerhalb ihm befindlichen Raum als einen bloßen Theil zu denken, und so werden die willkührlich begrenzten Theile des Raums erst durch die Vorstellung des ganzen unendlichen Raums

möglich, nicht aber dieser dadurch, daß wir uns erst einen begrenzten Raum vorstellen und dann alle Grenzen desselben wegdenken. Und überhaupt was gehört denn dazu, bei einem endlichen Raum, z. B. einer Kugel, alle Grenzen wegzudenken? Soll dieses möglich seyn, so muß es doch um so mehr möglich seyn, die Grenzen anfangs bloß weiter hinaus zu rücken. Allein soll ich dieses in Gedanken thun können; so muß ich erst voraussetzen, daß außerhalb der Kugel noch mehr Raum da ist, in welchen ich mit den Grenzen fortrücken kann; denn Grenzen des Raums setzen wollen, wo kein Raum ist, wäre doch wol widersinnig. Soll ich also endlich gar alle Grenzen wegdenken können, muß ich dann nicht schon vorher überzeugt seyn, der Raum sey so groß, daß er über alle mögliche Grenzen hinausgehe? Man wird also jetzt auch leicht einsehen, wie wenig die aus der Mechanik entlehnten Beispiele des Hrn. Karsten hier passend sind. Aus dem Ganzen eines Begriffs, den man erst aus mehrern Vorstellungen zusammengesetzt hat, nur einige von diesen ausheben, und die andern wegdenken, also z. B. bei einem materiellen und schweren Stabe nur auf seine Länge und Unbiegsamkeit Rücksicht nehmen, von seiner Materie, ihrer Schwere und allen übrigen Eigenschaften aber völlig abstrahiren und sich so einen mathematischen Hebel bilden, ist freilich für unsere Denkkraft eine eben so erlaubte als leichte Sache. Aber aus dem Begriffe eines Theils,

der

der nothwendig im Ganzen gedacht werden muß, und erst durch die Vorstellung des Ganzen möglich wird, wie dieses der Fall bei jedem endlichen Raum ist, sich durch bloßes Abstrahiren von den Grenzen des Theils den Begriff des Ganzen bilden wollen; dieses kommt mir beynahe noch künstlicher vor, als wenn jemand den Begriff des ganzen menschlichen Körpers sich dadurch bilden wollte, daß er von allen besondern Eigenschaften der menschlichen Leber abstrahirte. Eine erdichtete Ursache aber statt der wahren anzunehmen, wenn jene ganz eben dieselbe Wirkung hervorbringt, als diese, und so z. B. statt der einzelnen Schwere aller materiellen Theile eines Körpers einen einzigen schweren Punkt zu setzen, der eben so stark druckte, als jene zusammen; dieses kann zwar allerdings nur dem vernunftlosesten Eigensinn anstößig seyn, allein wie dieses auf die Unendlichkeit des Raums anwendbar sey, und was für einen wahren Begriff es irgend geben könne, dem man zum Vortheil der Erfindungskunst den vermeintlich erdichteten Begriff des unendlich großen Raums als gleichgültig substituiren könnte, dieses, gestehe ich, ist ein vollkommenes Geheimniß für mich. Was aber endlich die unendliche Menge betrifft, so ist, wie schon oben gezeigt worden, dieses allerdings ein Begriff, den sich die Vernunft durch bloße Abstraction bildet; indessen ist selbst dieser kein willkührlich erdichteter Begriff, sondern eine nothwendige Idee, welche die Vernunft zu ihrer eige-

nen Befriedigung bedarf. Da aber Menge und Zahl an sich ein leerer Begriff, und nichts weiter als die Form ist, ohne welche unser Verstand von der Größe der Dinge gar nicht urtheilen kann; so ist auch die unendliche Menge an sich ein leerer Begriff, mithin hat die Vernunft, die ihn aus ihrem Schooße selbst erzeugt, ein freyes Feld vor sich, auch in Erweiterung desselben so weit fortzugehen, als es ihr gefällt, und nicht nur die unendliche Menge wieder zu jeder beliebigen so wohl endlichen, als unendlichen Potenz ∞^x, ∞^∞ zu erheben, sondern auch mit dieser von neuem eben dasselbe vorzunehmen, und sich ein ∞^{∞^x}, ∞^{∞^∞} u. s. w. ohne Ende zu erdichten. Allein eben daher ist klar, daß alle diese Ausdrücke nichts weiter als leere Ideen, algebraische Rechnungssprache, ohne alle Bedeutung sind, so lange nicht erwiesen ist, daß dergleichen unendlich große concrete Dinge möglich sind, auf welche sie bezogen werden können. Ist es aber ausgemacht, daß Raum und Zeit dergleichen concrete unendlich große Dinge sind; so erlangt auch der Begriff einer unendlich großen Menge schon unmittelbar hiedurch seine völlige Realität, ohne daß der Mathematiker einmal nöthig hat, diese noch erst auf dem besondern Wege, den ich §. 22. bloß der Vollständigkeit wegen gegangen bin, darzuthun. Denn nun kann er seinen Begriff einer unendlichen Menge durch den Raum und die Zeit construiren,

d. i. in einer, nicht empirischen, sondern reinen Anschauung a priori darstellen, und alles, was sich construiren läßt, hat für den Mathematiker vollkommene Realität. Hierin hat derselbe, da er Raum und Zeit als die einzigen Objecte seiner reinen Wissenschaft betrachtet, ohne auf irgend einen äußern oder innern Gegenstand zu sehen, der ihnen correspondirt, auch völlig Recht. Denn unsere Vorstellung von Raum und Zeit liegt nicht in unserer Denkkraft, sondern unmittelbar in der Natur unserer Sinnlichkeit und macht die Form derselben aus. Sie ist daher nicht ein Begriff oder Gedanke, sondern reine Anschauung, und anschauen ist noch nicht denken. Sollen daher Raum und Zeit Objecte unsers Denkens oder Urtheilens werden, d. i. Dinge, die eine Qualität und Quantität haben; so ist dieses nicht anders möglich, als daß wir erst einerseits die Begriffe von Realität, Negation und Limitation als die Categorien der Qualität, und andererseits die Begriffe der Einheit, Vielheit und Allheit als die Categorien der Quantität auf sie beziehen. Also ist die objective Gültigkeit des Begriffs der Menge schon daraus klar, weil ohne ihn Raum und Zeit gar nichts Denkbares sind, und eben daher ist auch der Begriff einer unendlichen Menge schon deshalb objectiv gültig, weil ohne ihn Raum und Zeit gar nicht als unendlich groß gedacht werden können. Aber eben hieraus folgt von neuem, was ich schon §. 22. dargethan habe, daß der Begriff

einer unendlichen Menge nur gerade so weit objectiv gültig ist, und einen wahren Sinn hat, so fern derselbe sich im unendlichen Raum und in der unendlichen Zeit darstellen und anschaulich machen läßt, alle übrigen Ausdrücke einer unendlichen Menge dagegen, bei denen dieses nicht stattfindet, nichts weiter als leere nichtsbedeutende algebraische Zeichen, und bloße hevristische Fictionen sind.

§. 25.

Hieraus läßt sich nun auch die berühmte Stelle aus den Actis Erud. 1712. pag. 168. beurtheilen, in welcher der große Erfinder der so genannten Analysis des Unendlichen seine eigentliche Meinung vom Unendlichen eröffnet hat. Sie heißt wörtlich also: „ut nego, rationem, cujus terminus sit quantitas nihilo minor, esse realem; ita etiam nego, *proprie dari numerum infinitum* vel infinite parvum, *lineamve infinitam*, vel infinite parvam. Etsi Euclides saepe, sed sano sensu, de linea infinita loquatur. *Infinitum* continuum vel discretum, *proprie* nec *unum*, nec *totum*, nec *quantum* est; etsi analogia quadam pro tali a nobis adhibeatur; ut verbo dicam, est *modus loquendi.* Cum scilicet plura adsunt, quam ullo numero comprehendi possunt, *numerum* tamen illis rebus attribuimus *analogice*, quem *infinitum* appellamus„. Leibnitz behauptet also erstlich: es gebe eigentlich kein Unendlich-

endlich-

endlichgroßes, weder eine unendliche Zahl, noch Linie. Da aber dieser Ausdruck sehr zweideutig ist, so ist es nöthig, erst seinen wahren Sinn zu bestimmen. Soll derselbe so viel heißen: es existirt kein Unendlichgroßes in der wirklichen Welt, so ist es in diesem Sinne dem Geometer sehr gleichgültig, ob jemand behauptet: es gebe ein Unendlichgroßes, oder es gebe keins; wiewol ich auch hier nicht einsehe, wie die Leibnitzische Monadologie mit der Behauptung, die Menge der in jedem Körper befindlichen Monaden sey nicht unendlich, bestehen könne. Denn die Geometrie hat mit der wirklichen Welt nichts zu thun, sondern sie gehört, wie Hr. Hofrath Kästner sagt, zur intellectuellen Welt, wo alles wirklich ist, was aus Begriffen folgt. In der geometrischen Sprache heißt der Ausdruck: es giebt eine Größe, so viel: wir haben von derselben eine Vorstellung, oder einen Begriff, der in der Natur unsers sinnlichen Verstandes gegründet ist. Es giebt einen Raum, so fern seine Vorstellung unmittelbar a priori in uns liegt, und wir ohne ihn gar nichts äußerliches anschauen können. Es giebt Flächen, und Linien, so fern wir ohne die Vorstellung der erstern den Raum, und ohne die Vorstellung der letztern die Fläche gar nicht in Gedanken begrenzen können. Es giebt Dreyecke, Kreise, Cylinder, so fern wir den Raum in Gedanken so begrenzen können, als es der Begriff eines Dreyecks, Kreises, oder Cylinders erfordert. Es

giebt

giebt eine Zahl sieben oder tausend, so fern wir eine Linie, Fläche oder Körper in Gedanken in sieben oder tausend gleiche Theile theilen, oder auch jene sieben- oder tausendmal nehmen können. Wenn daher der Mathematiker frägt: ob es unendliche Größen giebt? so ist der eigentliche Sinn des Ausdrucks: es giebt, hier eben der und kein anderer, als wenn er überhaupt frägt, ob es Größen, d. i. ob es einen Raum, eine Fläche, Linie und Zahl giebt? Nimmt man aber den Ausdruck: es giebt, in diesem Sinne; so ist es eben so eigentlich wahr, daß es einen unendlichen Raum, unendliche Flächen und Linien, und also auch eine unendliche Menge giebt, als daß es überhaupt einen Raum, eine Fläche, Linie und Zahl giebt, weil die Vorstellung, die wir vom Raum haben, schlechterdings was absolut Unbegrenztes, d. i. Unendlichgroßes in sich schließt, und daher der Begriff des unendlichen Raums eben so real ist, als der Begriff des Raums selbst. Wem es also anstößig ist, zu sagen: es giebt unendliche Größen; der ist auch nicht befugt zu sagen, daß es einen Raum und in demselben Linien und Flächen giebt. Aber der verwandelt dann auch die ganze Lehre vom Unendlichen offenbar in ein sinnloses Wortgezänk. Um daher dieses zu vermeiden, erkläre ich hiedurch ein- für allemal, daß, wenn ich den Begriff des Unendlichgroßen einen objectiv gültigen realen Begriff nenne, und sage: es giebt unendliche Größen, ich hierunter eben das verstehe,

was

was jeder Mathematiker meint, wenn er Linien und Zahlen nicht für chimärische, sondern für reale Begriffe hält, und sagt: es giebt gerade und krumme Linien, gerade und ungerade Zahlen.

Nun scheint zwar Leibnitz gerade das zu leugnen, daß man in eben dem Sinne sagen könne, es gebe ein unendlich Großes, in welchem man sagt: es giebt eine Größe. Denn nach seiner Meinung soll das Unendliche eigentlich keine Größe, sondern bloße Kunstsprache seyn, vermittelst welcher wir dasselbe nach einer gewissen Analogie bloß als eine Größe ansehen und behandeln, also vielleicht ungefähr so, wie wir die Ausdrücke $a^{\frac{2}{3}}$, a^{-2}, als wirkliche Potenzen von a betrachten, ob sie es gleich eigentlich nicht sind. Allein daß das Unendlichgroße keine bloße Kunstsprache sey, ist schon im Vorhergehenden ausführlich gezeigt worden. Um indessen allen Schein zu vermeiden, als ob ich geflissentlich irgend etwas übergangen wäre, was diese Meinung zu begünstigen scheint; so wird es gleichwol nöthig seyn, die Gründe näher zu prüfen, auf welche Leibnitz seine Meinung stützt. Sein Hauptgrund ist der, weil das Unendliche eigentlich weder Eins, noch ein Ganzes, noch eine Größe sey. Aber hier wird es doch erlaubt seyn, zu fragen: woher nicht? Denn ohne Beweis überzeugt mich auch ein Leibnitz nicht. Indessen hat er diesen nicht gegeben, und das wenige, was er als Erläuterung anführt, beweist

mehr

mehr das Gegentheil, als das, was es beweisen soll. Wenn nemlich, sagt er, mehrere Dinge dasind, als wir durch irgend eine Zahl zusammenfassen können; so eignen wir ihnen doch analogisch eine Zahl zu, die wir unendlich nennen. Hier sieht also Leibnitz bloß auf den Begriff einer Zahl im eigentlichsten strengsten Verstande, da man nemlich unter derselben eine begrenzte Menge von Einheiten versteht; denn ich wenigstens wüßte nicht, wie seine Worte Zusammenhang hätten, wenn er damit mehr als soviel sagen wollte: wenn die Menge der Dinge so groß ist, daß sie alle Zahl übersteigt, so kann man ihnen nach der Strenge des Begriffs auch eigentlich keine Zahl mehr beilegen; indessen sagen wir doch, nach der Analogie der noch zählbaren Dinge, auch von ihnen: ihre Zahl ist unendlich groß. Hierin hat auch Leibnitz vollkommen Recht. Denn eine Menge, die alle Zahl übersteigt, d. i. keine Zahl mehr ist, doch im eigentlichen Sinne eine Zahl zu nennen, wäre allerdings widersprechend. Allein was nöthigt uns denn zu diesem widersprechenden Namen? Zahl heißt eine eingeschränkte begrenzte Menge, folglich ist der Begriff der Zahl dem Begriffe der Menge untergeordnet, und enger, als dieser. Eine Menge, die größer ist, als jede Zahl, ist also freilich keine eigentliche Zahl mehr, aber sie ist doch im eigentlichen Sinne eine Menge, nemlich eine mehr als endliche, d. i. eine unendliche Menge, und was hindert uns also, sie mit die-

sem

sem eigentlichen Namen zu benennen? Ueberhaupt aber wüßte ich nicht, ob man sich directer widersprechen könnte, als wenn man irgend etwas, das den Begriff des **Mehrern** und **Größern** enthält, für keine eigentliche wahre Größe erkennen wollte. Denn Größe ist ein bloßer Vergleichungsbegriff, den wir nicht anders als mittelst der Begriffe der Einheit, Mehrheit und Allheit bilden können. Ein Ding hat also einen desto vorzüglichern Anspruch auf den eigentlichen Namen einer Größe, je mehr es enthält, d. i. je größer es ist, und wenn es ein Ding gäbe, das alle übrigen zusammen enthielte, d. i. das Allergrößeste wäre, so würde diesem der Name einer Größe im vorzüglichsten Grade gebühren. Sollte also das, was wir uns größer, als alles Endliche vorstellen, ja das, was wir, wofern anders diese Vorstellung stattfindet, als das Allergrößeste denken, eben darum keine eigentliche Größe seyn; so möchte ich wol wissen, was Größe sey, und wie man sich ein Größeres oder Allergrößestes denken könne, ohne damit den Begriff der Größe zu verknüpfen. Es ist also wol unleugbar ein bloßer Mißverstand, zu welchem der große Leibnitz vornemlich durch den Begriff der Zahl veranlaßt wurde, wenn ihm das Unendlichgroße keine eigentliche Größe zu seyn schien. Eben so verhält es sich auch mit dem Ausspruch, daß das Unendlichgroße eigentlich weder **Eins** noch ein **Ganzes** sey. Mit welchem Grunde kann man dieses erweisen? Wir nennen ein

Ding

Ding A eins, so fern wir es an sich betrachten, wie es ist, ohne davon etwas wegzudenken, oder etwas hinzuzudenken; denn, denken wir vom Dinge A das Ding B weg, oder denken wir zu A das Ding B hinzu, so denken wir schon mehrere Dinge, nemlich A und B. Was soll uns nun hier im Wege seyn, das Unendlichgroße, z. B. die von A durch B (Fig. 2.) ohne Ende fortgehende gerade Linie an sich, ohne Rücksicht auf etwas anderes, zu betrachten, und sie also im eigentlichsten Sinne eins zu nennen? Die Vorstellung, die wir vom unendlichen Raum haben, ist ja die, daß er nur einer, nicht mehr als einer ist. Die unendliche Ebene, in welcher ein Dreyeck liegt, imgleichen die unendliche gerade Linie, die von A durch B geht, ist ja ebenfalls nur eine, nicht mehr als eine. Was aber im eigentlichsten Sinne nur eins, nicht mehr als eins ist, ist das nicht eben im eigentlichsten Sinne eins? Wenn wir mehrere Dinge A, B, C rc. als ein Ding D betrachten, so nennen wir das Ding D ein Ganzes, und die mehrern A, B, C rc. seine Theile rc. Ist nun, wie gezeigt worden, das Unendlichgroße im eigentlichsten Sinne eins, so werden wir es auch ein Ganzes, und alle die mehrern Dinge, die es enthält, seine Theile nennen können, und so werden denn die Ausdrücke: der ganze unendliche Raum, die ganze unendliche Ebene, oder gerade Linie, wol in eben dem eigentlichen Sinne wahr seyn, als wenn wir sagen: das ganze Dreyeck,

das

das ganze Prisma. Ob eine Größe begrenzt, oder unbegrenzt sey, mithin von uns durch successive Vorstellung völlig übersehen werden könne, oder nicht, dieses kommt bei dem Begriffe des Ganzen in keine Betrachtung, sondern dieser erfordert bloß, daß wir von dem, was wir ein Ganzes nennen, eben dieselbe Vorstellung haben, als von allen seinen Theilen zusammen, daß wir alle diese, ihre Menge mag endlich oder unendlich seyn, als ein Ding betrachten.

§. 26.

Ist nun aber eine unendlich große Größe und Menge nicht einmal ein erdichteter, sondern ein realer objectivgültiger Begriff; so fällt hiedurch um so mehr der Verdacht, ob derselbe nicht vielleicht gar ein widersprechender Begriff seyn mag, völlig hinweg. Dieser Verdacht hat unlängst ein nicht geringes Ansehen gewonnen, da die Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften in der Preisaufgabe vom Jahr 1784, in welcher sie eine deutliche und genaue Theorie über das in der Mathematik so genannte Unendliche forderte, folgende merkwürdige Worte beifügte: On sçait que la haute Géometrie fait un usage continuel des infiniment grands et des infiniment petits. Cependant les Géometres, et même les Analystes anciens, ont évité soigneusement tout ce qui approche de l'Infini; et de grands Analystes modernes avouent que les termes *grandeur infinie* sont contradictoi-

re. L'Académie souhaite donc qu'on explique comment on a deduit tant de théoremes vrais d'une supposition *contradictoire*, et qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre à être substitué à *l'Infini*, sans rendre trop difficiles, ou trop longues, les recherches qu'on expédie par ce moyen. &c. Vielleicht hat die Königl. Akademie auf die eben geprüfte Stelle des Hrn. v. Leibnitz Rücksicht genommen, und so wäre dann nunmehr die Entscheidung leicht. Herr Hofrath Karsten meint dagegen a. a. O. §. 18, und vielleicht richtiger, die Königl. Akademie habe hier gewiß den von Herrn Euler in seinen Inst. Calc. Diff. P. I. Cap. III. §. 72. vorausgesetzten vermeinten Grundsatz: **jede Größe könne ohne Ende vermehrt werden**, im Sinne gehabt. Dem sey nun, wie ihm wolle, so hat Hr. Karsten völlig Recht, daß der Vortrag des großen Eülers a. a. O. jeden Leser, der sich an die Begriffe des Unendlichen noch nicht gewöhnt hat, nothwendig stutzig machen muß. Es wird also ohne Zweifel der Mühe werth seyn, dem wahren Sinne desselben nachzuspüren, und besonders zu untersuchen, ob dieser unsterbliche Analyst das Unendlichgroße in der That für einen widersprechenden Begriff gehalten habe.

§. 27.

Nachdem Euler §. 72. 73. als ungezweifelt vorausgesetzt, daß jede Größe ins Unendliche vermehrt

mehrt werden könne; so sagt er §. 74. „Ex eo, quod quantitas in infinitum augeri possit, quidam concluserunt, dari revera quantitatem infinitam, eamque ita descripserunt, ut *nullum amplius augmentum suscipere possit*. Hoc autem ipso ideam *quantitatis* evertunt, dum *eiusmodi* quantitatem statuunt, *quae ulterius augeri nequeat*. Praeterea vero secum ipsi infinitum admittentes pugnant; dum enim *incrementi*, quo quantitas sit capax, *finem faciunt*, simul negant quantitatem sine fine s. in infinitum augeri posse: sicque, dum quantitatem infinitam statuunt, eam simul tollunt. Si enim quantitas sine fine, hoc est in infinitum, augeri nequeat, certe nulla quantitas infinita existere poterit.„ In dieser Stelle finde ich noch nichts weiter, als daß Euler bloß wider diejenigen eifert, die das Unendlichgroße zugleich für das Allergrößeste, d. i. für etwas, das keiner weitern Vermehrung mehr fähig ist, halten. Denn nur eben diese sind es, die er hier eines doppelten Widerspruchs beschuldigt, nemlich, daß ihr Unendliches, weil es dem vorausgesetzten Grundsatze, daß jede Größe sich noch immer ins Unendliche vermehren lasse, widerspricht, einestheils keine Größe sey, anderntheils aber eben dadurch, daß es jenen Grundsatz aufhebt, zugleich seine eigene Möglichkeit umstoße. Aber allerdings auffallend ist es, wenn er gleich darauf §. 75. also

 fort-

fortfährt: „Hinc igitur ex eo ipso, quod omnis quantitas in infinitum augeri possit, sequi videatur, nullam dari quantitatem infinitam. Quantitas enim continuis incrementis aucta, infinita non evadet, nisi iam sine fine increverit: quod autem sine fine fieri debet, id non tanquam iam factum concipi potest.„ Hier gewinnt es in der That das Ansehn, daß er das Unendlichgroße für einen widersprechenden Begriff gehalten; indem er sagt: eine immerfort wachsende Größe werde nicht eher unendlichgroß, als bis sie schon wirklich ohne Ende gewachsen, und mithin keiner weitern Vermehrung mehr fähig ist. Denn von einer Größe, die ohne Ende wachsen soll, sagen: sie sey bereits ohne Ende gewachsen, ist ein offenbarer Widerspruch; und da er auf diese Art die Annahme derer, die das Unendliche als etwas beschreiben, was keiner weitern Vermehrung mehr fähig ist, für richtig und nothwendig erklärt, so treffen die beiden Widersprüche, die er §. 74. dieser Annahme vorwirft, das Unendliche jezt nicht mehr, wie vorhin, bloß *κατ' ανθρωπον*, sondern geradezu.

§. 28.

Indessen zeigt schon sein so sehr schwankendes sequi *videatur*, (es könnte hieraus zu folgen scheinen, daß es keine unendliche Größe gebe,) daß diese Folge ihm selbst nicht eingeleuchtet habe. Denn was soll jenes mit Fleiß gewählte videatur,

wofern er von der Richtigkeit des Satzes: das Unendlichgroße sey ein widersprechender Begriff, in der That überzeugt war? Noch deutlicher aber sieht man dieses, wenn er unmittelbar darauf sagt: Interim tamen non solum huiusmodi quantitatem, ad quam incrementis sine fine congestis pervenitur, certo charactere indicare, sicque debito modo in calculum inducere licet; sed etiam in *mundo* eiusmodi casus *existere*, vel saltim *concipi* possunt, quibus *numerus infinitus actu existere videatur.* Sic si materia in infinitum sit divisibilis, uti plures Philosophi statuerunt, numerus partium, quibus datum quodque materiae frustum constat, *revera erit infinitus*; si enim statueretur finitus, materia certe non in infinitum foret divisibilis. Simili modo si universus mundus esset infinitus, uti pluribus placuit, numerus corporum mundum componentium finitus certe esse non posset, foretque ideo *quoque infinitus.* Hier sagt also der große Mann, das Unendlichgroße lasse sich so gar in der materiellen Welt als wirklich, oder doch wenigstens als möglich denken, und daß es ihm, ob er gleich auch hier das videatur gebraucht, mit dieser Behauptung wahrer Ernst gewesen, ist, so viel ich einsehe, außer allem Zweifel. Denn er sagt in der letztern Stelle ganz bestimmt: wenn die Materie ins Unendliche theilbar ist, so ist die Zahl der Theile, aus welchen

jedes Stück Materie besteht, in der That unendlich; denn, wäre sie endlich, so wäre die Materie zuverlässig nicht ins Unendliche theilbar. Nun aber behauptet er §. 78 - 81, daß die Materie schlechterdings ins Unendliche theilbar seyn müsse, und widerlegt die gegenseitige Meinung mit sichtbarer Sorgfalt. Also ist es wol unleugbar, daß ihm die Behauptung, es gebe in der Welt wirklich eine unendliche Zahl, wahrer Ernst gewesen ist.

§. 29.

Zwar scheint er dieser Behauptung wieder offenbar zu widersprechen, wenn er §. 76. sagt: Qui igitur dicit hoc casu, numerum partium fore infinitum, is partes ultimas, quae ulterius sint individuae, intelligit. Denn da er so wohl hier, als im folgenden, die letzten Theile der Materie so sorgfältig bestreitet, so scheint es, als wenn er hier auch den Satz bestreite, daß die Zahl der Theile unendlich groß sey, und es ist nicht zu leugnen, daß diese Stelle überhaupt beim ersten Anblick äußerst auffallend und dunkel ist. Allein daß sein Sinn in dieser Stelle nicht der seyn könne, die Zahl der Theile in der Materie sey nicht unendlich, ist nicht nur schon daraus klar, weil sonst, wie bereits gezeigt worden, sein ganzer Vortrag sich selbst widersprechen würde, sondern der ganze Zusammenhang zeigt es auch, daß er hier wiederum, wie §. 74. 75., bloß wider diejenigen streitet, die das Unend-

end-

endliche als so was ansehen, das schon ohne Ende gewachsen ist, und daher nicht weiter vermehrt werden kann. Dieses erhellet schon aus den unmittelbar folgenden Worten: ad quas (partes ultimas) cum nunquam perveniatur, et quae propterea *nullae* sunt, is has ipsas partes, *quae nullae sunt*, numerare conatur. Si enim materia sine fine continuo ulterius subdividi potest, partibus *individuis* s. *simplicibus* prorsus *caret*: neque adeo quicquam superest, quod numerari *queat*. Hanc ob rem qui materiam in infinitum divisibilem statuit, is simul negat, materiam ex partibus *simplicibus* esse compositam. Denn wer sieht hier nicht, daß Euler bloß diejenigen widerlegt, welche die unendliche Theilung der Materie als was bereits geschehenes betrachten, und daher in derselben einfache Theile annehmen, die sich nicht weiter theilen lassen? Dieses ist um so viel gewisser, da er §. 79. vom berühmten Erfinder der Monaden, der gleichfalls die Theilbarkeit der Materie ins Unendliche behauptete, sagt: Neque ergo ante ad monades pervenire licet, quam corpus *actu* in infinitum *sit divisum.* Hoc ipso autem existentiam entium simplicium, ex quibus corpora constent, penitus tollit: nam qui negat, corpora ex entibus simplicibus esse composita, et ille qui statuit, corpora in infinitum esse divisibilia, in *eadem* prorsus sunt sententia. Hier verwirft er also

die Leibnitzischen Monaden ausdrücklich deshalb, weil ihre Annahme voraussetzt, daß die Körper schon wirklich ins Unendliche d. i. ohne Ende (denn beide Ausdrücke sind ihm §. 74. gleichbedeutend,) in seine einfache Theile getheilt sey, da doch ihre Theilbarkeit ins Unendliche gerade das sagt, daß die Theilung sich nie vollenden lasse, und daß also keine einfachen Theile möglich sind. Der allerdeutlichste Beweis aber, daß Euler den §. 75. behaupteten Satz: es giebt in der Welt wirklich eine unendlich große Zahl, durch vorerwähnte Stelle §. 76. nicht im mindesten hat zurücknehmen wollen, ist der, daß er sich sogleich darauf §. 77. folgendermaaßen erklärt: „Quodsi autem, dum de partibus alicuius corporis s. materiae loquimur, non *ultimas seu simplices*, quippe quae nullae sunt, intelligamus, sed *eas*, quae divisio *revera* produxit: tum, admissa hac hypothesi de divisibilitate materiae in infinitum, unumquodque vel minimum materiae frustum non solum in plurimas partes dissecari, sed etiam nullus numerus *tam magnus* assignari poterit, quo *non maior* partium ex illo frusto sectarum numerus exhiberi queat. Numerus ergo partium *non quidem ultimarum*, sed quae ipsae adhuc sint *ulterius divisibiles*, quae unumquodque corpus componunt, *omni numero assignabili erit maior*. Simili modo, si universus mundus sit infinitus, *numerus* corporum

porum mundum constituentium pariter *omni assignabili erit maior*; qui cum *finitus* esse *nequeat*, sequitur numerum *infinitum* et numerum *omni assignabili maiorem* esse nomina synonyma.„ Diese Stelle klärt die wahre Meinung des großen Mannes völlig auf. Nemlich hier zeigt er deutlich, daß er den Begriff einer unendlichen Zahl oder Menge bloß in dem Fall für widersprechend erklärt, wenn man unter derselben, wie die Vertheidiger letzter und einfacher Theile in der Materie zu thun gezwungen seyn, eine schon ohne Ende gewachsene Zahl versteht, die allerdings was Widersprechendes ist. Nimmt man dagegen den Begriff einer unendlichen Menge in seinem wahren Sinne, so daß man darunter nichts anders versteht, als eine Menge, die größer ist, als jede Zahl, die sich angeben läßt; so sey derselbe so wenig widersprechend, daß vielmehr eine unendliche Menge von materiellen Dingen wirklich in der Welt existiren müsse, wofern die Annahme stattfinden soll, daß die Materie ins Unendliche theilbar und das Weltgebäude unendlich groß sey. Denn die Annahme des erstern erfordere schlechterdings, daß die Materie aus keinen einfachen Theilen bestehe, sondern daß jeder Theil derselben von neuem theilbar, mithin die Menge der theilbaren Theile größer sey, als jede endliche Menge. Die Annahme des letztern aber erfordere eben so, daß die Menge der existirenden Körper größer sey, als jede endliche Menge.

Da er nun, wie ich bereits angemerkt habe, a. a. O. §. 78 = 81. deutlich zeigt, daß er wenigstens die Annahme, die Materie sey ins Unendliche theilbar, für gewiß gehalten; so ist es außer allem Zweifel, daß er, weit entfernt, eine unendliche Menge für widersprechend zu halten, vielmehr ihre Wirklichkeit in der materiellen Welt geglaubt, und ihr also sogar eine solche Existenz zugeschrieben, die der Mathematiker, so lange er in seinem Fache bleibt, ihr zuzuschreiben eben so wenig befugt, als genöthigt ist.

§. 30.

Es ist in der That zu bedauren, daß der unsterbliche Analyst bei seiner Prüfung des Begriffs vom Unendlichen sich in die unfruchtbare metaphysische Streitigkeit über die Theilbarkeit der Materie und die Größe des Weltgebäudes eingelassen, die gar nicht hieher gehört, und seine Untersuchung nur unnöthiger Weise erschweren und verwirren mußte, da doch diese weit lichtvoller und kürzer hätte werden können, wenn er dafür lieber sein Augenmerk auf die arithmetischen und geometrischen Größen gerichtet hätte. Daß nicht nur die Menge der vermischten Zahlen, welche zwischen jedweden zwo nächsten ganzen Zahlen, z. B. zwischen 1 und 2, zwischen 2 und 3 u. s. w. möglich sind, sondern auch die Menge der ächten Brüche, die zwischen 1 und 0, imgleichen zwischen jedem Paar ächten Brüchen, so klein auch

ihre Differenz seyn mag, z. B. zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ stattfinden, keinesweges endlich, mithin unendlich groß sey, ist eine Sache, die unleugbar ist, und die man gleichwol leugnen müßte, wofern eine unendliche Menge ein widersprechender Begriff wäre. Allein noch zweckmäßiger wäre die Untersuchung des großen Eulers geworden, wenn er sie statt der materiellen Welt auf die geometrischen Linien, Flächen und Körper gerichtet hätte. Von diesen nemlich ist es ausgemacht, daß sie ins Unendliche theilbar sind, und so hätte er mit der ganzen Untersuchung sehr geschwinde fertig werden können. Denn da der Punkt kein Theil einer Linie, sondern bloß Grenze derselben ist; so ist jeder Theil einer Linie selbst eine Linie. Nun aber machen zween Punkte noch keine Linie aus, folglich müssen zwischen den beiden Endpunkten einer jeden Linie noch mehrere Punkte stattfinden. Da nun jeder Zwischenpunkt die Linie in zween Theile theilt, so ist jede Linie theilbar, und aus mehrern Linien zusammengesetzt. Also finden in einer geometrischen Linie erstlich keine einfache, untheilbare, oder letzte Theile statt, und da jede Linie wieder in Linien theilbar ist, so ist zweitens die Menge der Linien, in welche jede Linie theilbar ist, größer als jede Zahl, mithin unendlich; das heißt eben: jede Linie ist ins Unendliche theilbar, und so kann man im geometrischen Verstande allerdings sagen, daß es in jeder Linie wirklich eine unendliche Menge von Linien giebt. Wäre also

eine unendliche Menge ein widersprechender Begriff, so wäre auch die Theilbarkeit einer Linie ins Unendliche ein Widerspruch, und so wäre es um die ganze Geometrie geschehen. Aber eben hieraus folgt drittens, daß man sich selbst widersprechen würde, wenn man von irgend einem Theile a einer endlichen Linie sagen wollte, daß diese aus einer unendlichen Menge von dergleichen Theilen zusammengesezt wäre. Denn, wäre dieses, so wäre a der unendlichvielste Theil einer endlichen Größe, dieser aber ist ein Unding (§. 13. n. 2.). Was hier von den Linien bewiesen worden, gilt auch von den geometrischen Flächen und Körpern, denn man darf in den angeführten Schlüssen überall statt der Linien nur Flächen oder Körper, und statt der Punkte nur Linien oder Flächen setzen. Auf diese Weise läßt sich also, wenn man sich nicht in die materielle Welt verliert, sondern bloß bei den geometrischen Größen stehen bleibt, alles das, was Euler in der obigen Stelle von der unendlichen Menge behauptete, ohne viele Mühe als richtig darthun. Und hier erhellet nun zugleich, daß es ganz was anders ist, wenn man nach dem zweiten Satze sagt, die Menge der Linien oder Theile, in welche jede auch noch so kleine endliche Linie theilbar ist, ist unendlich groß, als wenn man nach dem dritten Satze sagt: eine endliche Linie ist aus einer unendlichen Menge gewisser gleicher Theile zusammengesetzt. Denn der zweite Satz sagt: die Linie läßt sich ohne Ende

immer=

immerfort theilen; der dritte aber behauptet, die Theilung ohne Ende sey schon wirklich geendigt. Die unendliche Menge nun, von welcher im dritten Satze die Rede ist, erklärte Euler mit Recht für widersprechend; diejenige aber, von welcher der zweite Satz redet, nahm er so gar in der materiellen Welt als wirklich an.

§. 31.

Es ist nicht zu leugnen, daß die so wichtige Unterscheidung dieser beiden Sätze, die dem ersten Anblick nach beinahe synonymisch zu seyn scheinen, unserer Vorstellung einige Schwierigkeit macht, und dieses ist eben die Ursache, woher man dieselben so oft zu vermischen und sich dadurch einen widersprechenden Begriff von einer unendlichen Menge zu machen pflegt. Allein Schwierigkeit in unserer Vorstellung, zumal beim Unendlichen, das schon seiner Natur nach von uns nie ganz umfaßt werden kann, ist noch kein **Widerspruch**, noch kein **gültiger Zweifel** an der Richtigkeit der Sache, sondern vielmehr Aufforderung, alle Anstrengung aufzubieten, um sie, so viel nur möglich ist, zu heben, und die Sache immer deutlicher ins Licht zu setzen. Der zweite Satz sagt: jede Linie, auch jede endliche, läßt sich ohne Ende theilen, z. B. ohne Ende halbiren; sie läßt sich also ohne Ende fort in immer mehrere und kleinere gleiche Theile theilen, folglich auch ohne Ende fort aus immer mehrern und kleinern gleichen Theilen

zusammensetzen; aber eben hiedurch sagt derselbe, daß diese mögliche Theilung niemals aufhören könne, daß daher kein aliquoter Theil der Linie so klein ist, daß nicht noch ein kleinerer stattfinde, und daß also die Menge gleicher Theile, aus welchen wir uns eine endliche Linie zusammengesetzt vorstellen können, so klein wir auch einen solchen aliquoten Theil der Linie denken mögen, allemal endlich seyn müsse, mithin eine endliche aus unendlich vielen gleichen Theilen zusammengesetzte Linie ein Widerspruch sey, nemlich eine Linie, die nicht ins Unendliche theilbar ist, oder eine Linie, die aus solchen gleichen Theilen zusammengesetzt ist, auf die man kommt, nachdem die unendliche Menge von Halbirungen bereits vollendet ist. Die ganze Schwierigkeit, die so viel Anstrengung des Verstandes erfordert, und so bald diese erschlafft, denselben doch wieder von neuem verwirrt, rührt also bloß von der unendlichen Theilbarkeit des Raums her, die aber doch wol kein Geometer deshalb auch bezweifeln wird. Die unendliche Theilbarkeit des Raums aber beruht wieder bloß auf der Stetigkeit desselben, die gleichfalls unleugbar ist. Denn bloß daher, weil die geometrische Linie stetig ist, folgt, daß zwischen zween Punkten, die wir uns in derselben vorstellen, allemal ein Theil von ihr begriffen ist, folglich keine zween Punkte in ihr gedacht werden können, die einander die nächsten wären, mithin die Menge der Zwischenpunkte, die zwischen ihren End-

punkten

punkten stattfinden, und daher auch die Menge der Theile, in welche sich die Linie durch dieselben theilen läßt, unendlich groß, also die Linie ins Unendliche theilbar ist, daß aber eben daher kein Theil möglich sey, der unendliche male genommen, eine endliche Linie zusammensetzen könnte, indem derselbe sonst rückwärts erst nach unendlich vielen Theilungen herauskäme. Alles Schwierige in der Vorstellung einer unendlichen Menge rührt also am Ende lediglich von der Stetigkeit des Raums her; denn diese führt uns eben auf die unendliche Theilbarkeit desselben; und da sie uns hiedurch nöthigt, sogar in endlichen völlig begrenzten Linien, Flächen und Körpern eine unendliche Menge von möglichen Theilen anzunehmen, so ist es unserer Einbildungskraft leicht, uns vorzuspiegeln, endliche Linien, Flächen und Körper müßten sich daher auch aus unendlich vielen gleichen Theilen zusammensetzen lassen. Wendet man dagegen den Begriff der unendlichen Menge nicht auf endliche, sondern auf wirklich unendliche Größen an; so kommt jene Schwierigkeit gar nicht vor. Man nehme z. B. die unendliche gerade Linie AD (Fig. 2.), die von A aus nach der Seite D ohne Ende fortgeht, so läßt sich der Theil AB auf derselben unendlich viele mal auftragen. Da also hier die Wiederholung des Theils AB eben so ohne Ende fortgeht, als die Linie AD selbst; so kann man hier ohne die geringste Schwierigkeit sagen: AB ist in der unendlichen

lichen Linie AD unendlich viele male enthalten, folglich der unendlichvielste Theil von ihr, und diese ist also aus unendlich vielen solchen gleichen Theilen, als AB ist, zusammengesetzt (§. 14.). Denn hier komme ich auf den Theil AB nicht dadurch, daß ich die unendliche Linie AD theile, sondern ich setze diese vielmehr durch ohne Ende fortgehende Wiederholungen des aliquoten Theils AB in Gedanken wirklich zusammen. Die Vorstellung der unendlichen Menge wird uns demnach bloß schwer, wenn wir uns dieselbe in endlichen Dingen denken sollen, und hieraus läßt sich nun leicht erklären, woher bei der außerordentlichen Gabe der Deutlichkeit, die sich in allen Werken des großen Eulers auszeichnet, seine Untersuchung über das Unendlichgroße so dunkel und verwickelt ausfiel, indem er sie gerade vorzüglich darauf richtete, den Begriff der unendlichen Menge auf endliche Dinge anzuwenden, die er für stetig und ins Unendliche theilbar hielt. Denn bei der Anwendung desselben auf die Meinung von der unendlichgroßen Welt ist sein Vortrag überall so deutlich, als man es nur wünschen kann. Ueberhaupt ist der Begriff der Stetigkeit, der uns eben zwingt, selbst im Endlichen eine unendliche Menge anzunehmen, nach meiner Einsicht, unter allen mathematischen Begriffen gerade der allerschwerste und geheimnißvolleste für uns, und gegen ihn ist selbst der Begriff des Unendlichen, wenn er nicht durch jenen verwirrt wird, sehr leicht und helle.

Wie gut sich sowol die Geheimnisse des Unendlichgroßen, als des so genannten Unendlichkleinen enthüllen lassen, hoffe ich im folgenden darzulegen. Aber wie ein geometrischer Punkt, z. B. der Schwerpunkt des Körpers in der reinen Mechanik, indem er eine Linie beschreibt, nach und nach durch alle Punkte derselben gehen muß, ohne daß es gleichwol einen nächsten giebt, in den er aus dem Anfangspunkte unmittelbar kommen kann, wie eine krumme Linie in jedem Punkte ihre Richtung ändert, ohne daß es gleichwol für diese Veränderung weder zween nächste Punkte, noch zwo nächste Richtungen giebt, und wie dem ungeachtet diese Veränderung der Richtung sogar in jeder krummen Linie anders ist, wie ferner (Fig. 3.) die Linie CG, welche AQ in H schneidet, wenn sie nach der Seite GQ gedreht wird, endlich, wenn sie in die Lage Cg kommt, aufhören kann, AQ zu schneiden, ohne daß es einen letzten Durchschnittspunkt giebt, wo dieses geschieht, u. s. w.; dieses werden wol für den menschlichen Verstand immer Klippen bleiben. Und doch könnte wol kein Gedanke ungesunder seyn, als wenn man wegen dieser Schwierigkeiten, die der Begriff der Stetigkeit unserer Vorstellung macht, argwöhnen wollte, die Stetigkeit des Raums sey ein widersprechender Begriff. Endlich aber ist noch sehr wohl zu bemerken, daß die ganze Schwierigkeit, mit welcher der unsterbliche Euler kämpfte, nicht das Unendlichgroße selbst, wie es in der Geo-

metrie vorkommt, sondern nur den arithmetischen Begriff der unendlichen Zahl oder Menge betrifft. Vielmehr zeigt er ziemlich deutlich, daß man nicht nur die Axe der Parabel, sondern auch das materielle Weltgebäude für unendlich groß halten müsse. Allein, giebt es unendlich große ausgedehnte Größen, so ist es wol für sich klar, daß auch die Menge ihrer endlichen Theile unendlich seyn muß, und daß also nichts widersprechender seyn kann, als wenn man gleichwol den Begriff einer unendlichen Menge für widersprechend erklären wollte.

§. 32.

So viel ich einsehe, ist diese letzte Bemerkung schon an sich hinreichend, jeden Unbefangenen zu überzeugen, daß der große Euler den Begriff des Unendlichgroßen auf keine Weise für widersprechend gehalten hat. Allein ich hielt es eben so sehr zur Hebung aller weitern Mißverständnisse nöthig, als ich es der Asche des unvergeßlichen Analysten schuldig zu seyn glaubte, ausführlich zu zeigen, wie richtig und zusammenhangend er auch hier, wo er sich beständig zu widersprechen scheint, in der That gedacht hat. Herr Hofr. Karsten selbst scheint ihn mißzuverstehen, und zu glauben, Euler habe den Begriff des Unendlichen in der That für widersprechend erklärt, und sey hiezu bloß durch den vermeinten Grundsatz, jede Größe könne ohne Ende vermehrt werden, verleitet worden. Denn er sagt in seiner Abh. vom Math. Unendlichen §. 18. aus-

drücklich: „aus jenem vermeinten Grundsatze „wird (von Euler) gefolgert, es könne keine un„endliche Größe geben; denn diese könne eben „darum, weil sie unendlich seyn solle, nicht wei„ter vermehrt werden, es müsse also die sonst mög„liche Vermehrung ihr Ende schon erreicht haben: „vermöge jenes Grundsatzes aber könne jede Größe „ohne Ende vermehrt werden, und eins wider„spreche dem andern.„ Daher widerlegt er diesen Schluß bloß dadurch, daß er a. a. O. §. 19. 20. jenen Grundsatz in der Allgemeinheit genommen für falsch erklärt, und ihn lediglich aufs Endliche einschränkt. Allein einestheils habe ich gezeigt, daß Euler in dieser Folgerung gar nicht das Unendliche in seinem wahren Sinne meynt, sondern bloß wider die Vertheidiger einfacher unausgedehnter Theile in der Materie streitet, welche eine solche unendliche Menge von Theilen annehmen müssen, in welcher es einen letzten Theil gebe, und sich also offenbar widersprechen. Anderntheils aber ist selbst bei der Voraussetzung, daß jede Größe ohne Ende vermehrt werden könne, die Folge, das Unendliche sey widersprechend, nur in dem Falle richtig, wenn man, wie Hr. Karsten, das Unendliche nur als eins ansieht, und es daher mit dem Allergrößesten für einerley hält. In diesem Falle steht das Unendliche mit jenem Grundsatze freilich im Widerspruche, und so war für Hr. Karsten zur Rettung des Unendlichen allerdings nur das einzige Mittel übrig, jenen Grundsatz

bloß auf endliche Größen einzuschränken. Da aber der wahre von Hr. Eulern selbst angenommene Begriff des Unendlichgroßen, daß es nemlich größer sey, als jede angebliche d. i. endliche Größe, nichts weiter sagt, als daß dasselbe wenigstens in einer Rücksicht unbegrenzt, und etwas ohne Ende wachsendes seyn muß (§. 9.), übrigens aber an sich ganz unentschieden läßt, ob es nicht in anderer Rücksicht noch immer seine Grenzen haben könne, und daher in dieser Rücksicht noch einer weitern Vergrößerung fähig sey (§. 15. 16.); so ist die Behauptung, der Eulersche Grundsatz gelte bloß von endlichen Größen, wenigstens zu voreilig, wofern nicht erst die Frage entschieden ist, ob das Unendliche nur eins, und also zugleich das Allergrößeste ist, oder ob nicht etwa auch unter unendlichgroßen Größen eine größer als die andere, und daher auch diese noch immer einer Vergrößerung oder Vermehrung fähig seyn. Der Begriff des Unendlichgroßen an sich kann, wie gesagt, hier nichts entscheiden, sondern hier kommt es bloß darauf an, ob es unendlichgroße Größen giebt, und wie diese beschaffen sind (§. 19.). Ob es aber dergleichen giebt, und wie sie beschaffen sind, kann wiederum die Arithmetik oder der Begriff einer unendlichen Menge eben so wenig entscheiden, denn die Realität von diesem beruht wieder erst darauf, ob es auch Dinge giebt, auf welche derselbe anwendbar ist, und wie weit dieses stattfindet (§. 20.). Nun kennt die reine Mathe-

thematik keine andere Dinge, auf die sie den Begriff der Zahl und Menge anwenden kann, als den Raum und die Zeit. Diese aber sind wir schlechterdings gezwungen, im eigentlichen und wahren Sinne unendlich groß zu denken, und eben daher auch den Begriff einer unendlichen Menge für einen wahren realen Begriff zu halten (§. 21-24.). Da es also in der That zwo unendlichgroße Größen giebt, so hängt die Entscheidung der Frage, ob das Unendlichgroße nur eins, oder ob selbst unter den unendlichen Größen eine größer als die andere sey, lediglich von der eigentlichen Beschaffenheit des unendlichen Raums und der unendlichen Zeit ab, und da wir von dieser reine Anschauung haben, so kann es nunmehr nicht schwer seyn, diese Frage mit geometrischer Gewißheit zu entscheiden.

§. 33.

Wenn wir bei dieser Untersuchung zuerst auf die Natur der Zeit sehen, so ists klar, daß wir die ganze Zeit, die bis auf den jetzigen Augenblick verflossen ist, nicht anders als unendlich groß denken können. Man häufe vom jetzigen Augenblicke an rückwärts Jahrtausende auf Jahrtausende; so erschöpft doch keine Zahl von Jahrtausenden unsere Vorstellung von der ganzen verflossenen Zeit. Die Menge von Jahrtausenden, die unser Begriff von ihr in sich faßt, ist also größer, als jede Zahl, d. i. unendlich groß. Diese ganze un-

unendliche verflossene Zeit ist auch nur eine. Sie von der Seite, wo sie ohne Anfang ist, vergrößern wollen, hieße sich selbst widersprechen. Allein, ob sie gleich in dieser Rücksicht unbegrenzt und keiner Vermehrung fähig ist, so hat sie doch in anderer Rücksicht in der That ihre Grenze. Diese ist der gegenwärtige Augenblick, bis zu welchem hin wir sie betrachten. Ueber diese Grenze können wir wieder eben so durch eine Menge von Jahrtausenden hinausgehen, die größer als jede Zahl, d. i. unendlich groß ist, und so zu der ersten unendlichen Zeit a parte ante eine neue a parte post hinzufügen, die eben so wie jene an sich nur eine ist. Die ganze unendliche Zeit ist also ein stetiges Unendlichgroßes, das auf zwo bestimmten Seiten, nemlich a parte ante und a parte post, unbegrenzt ist, und das sich daher durch jeden beliebigen Augenblick, als eine gemeinschaftliche Grenze, in zween unendlich große Theile theilen läßt. Eine gleiche Bewandtniß, als es mit der Zeit hat, hat es auch mit einer geraden Linie, und eben dieses ist der Grund, warum sich die ganze unendliche Zeit durch eine gerade Linie construiren läßt. Denn, da sich jede endliche gerade Linie AB (Fig. 2.) nach zwo bestimmten Seiten C und D ohne Ende verlängern läßt, so ist jede gerade Linie, im ganzen Umfange ihrer Möglichkeit betrachtet, ein Unendlichgroßes CD, das nach zwo bestimmten Seiten C, D, unbegrenzt ist, und sich daher durch jeden Punkt A in zween

unendlich große Theile AC, AD, theilen läßt. Die ganze unendliche Zeit enthält also nicht nur eine, sondern bestimmt zwo und nicht mehrere unendlich große Zeiten, und die ganze unendliche gerade Linie besteht nicht aus nur einer, sondern bestimmt aus zwo und nicht mehrern unendlich großen geraden Linien. Das unendliche Ganze ist hier in beiden Fällen völlig unbegrenzt, von den beiden unendlichen Theilen aber ist jeder nur nach einer Seite unbegrenzt, nach der andern dagegen hat er seine Grenze, von welcher er anfängt. Das unendliche Ganze ist hier also auch mit keinem seiner beiden unendlichen Theile einerley. Man denkt ganz was andres, wenn man eine Zeit ohne Anfang und Ende, als wenn man eine Zeit denkt, die zwar keinen Anfang, aber doch ein Ende hat, und so auch ganz was andres, wenn man eine gerade Linie ohne Anfangs- und Endpunkt, als wenn man eine solche denkt, die zwar keinen Endpunkt, aber doch einen Anfangspunkt hat. Ob hier also nicht in beiden Fällen das unendlich große Ganze größer, als jeder seiner beiden unendlich großen Theile sey, überlasse ich dem Urtheile eines jeden. Wenigstens werden es doch diejenigen bejahen müssen, die es für so sehr ketzerisch ausschreien, daß ich die Allgemeinheit des Euklidischen Grundsatzes: das Ganze ist größer als sein Theil, nur auf endliche Größen einschränke, von denen doch beim Euklides allein die Rede ist. Wollten aber auch diese noch Auswege suchen, so

mögen sie denn zeigen, wie man ohne Unvernunft glauben könne, daß ein Ding, das, bei aller seiner Unendlichkeit auf der einen Seite, gleichwol auf der andern noch seine bestimmte Grenze hat, eben so groß seyn könne, als ein nach allen möglichen Seiten völlig unbegrenztes und in aller Rücksicht unendliches Ding. Allein noch deutlicher und reichhaltiger wird die Untersuchung, wenn man auf die Natur der geometrischen Flächen und Körper sieht. Hier hat Herr Hofrath Kästner in der §. 23. bereits angeführten Note d über die Karstensche Abhandl. mit wenig Worten alles gesagt, was zur völligen Entscheidung der Frage nöthig ist. „Es giebt,„ sagt er unmittelbar nach den Worten, die ich schon §. 23. angeführt habe, „es giebt an einem Punkte nie nur einen Winkel, „allemal vier, die paarweise Nebenwinkel und „Scheitelwinkel sind; nie nur einen Kegel, son„dern allemal ein paar am Scheitel entgegen„gesetzte u. s. w.„ Da in der Karstenschen Stelle, zu welcher diese Note gehört, von der Möglichkeit des Unendlichgroßen die Rede ist, daß nemlich in dem Begriffe einer ausgedehnten geometrischen Größe nichts liege, das uns hinderte, sie als unbegrenzt zu denken; da ferner Herr Hofr. Kästner in der vorhergehenden Note c nur eben die Karstensche Meinung, das Unendliche sey nur eins, bestritten, und mit den Worten geschlossen hat: wer eine unzählbare Menge denkt, denkt sie nicht als nur eine; so ist es wol auf keine

Weise

Weise zweideutig, was er mit den vier Winkeln, und dem Paar Kegel, die es an einem Punkte giebt, sagen will. Die Schenkel der vier Winkel an einem Punkte K (Fig. 4.) theilen nemlich, wenn man sich dieselben unendlich groß vorstellt, die ganze unendliche Ebene, in welcher sie liegen, in vier unendlich große Theile KAC, KCB, KBD, KDA, also besteht die ganze unendliche Ebene aus diesen vier unendlichen Flächen. Wenn ich demnach nur eine von ihnen, z. B. die unendliche Fläche KAC, denke, so denke ich nicht die ganze unendliche Ebene. Denn KAC ist bloß nach der einzigen Gegend AC hin unbegrenzt und ohne Ende fortgehend, nach den übrigen Gegenden der Ebene aber ist sie zwischen den unendlichen Schenkeln KC, KA, als ihren Grenzen, völlig eingeschlossen; die ganze unendliche Ebene dagegen ist nicht nur nach AC hin, sondern auch über die Grenzen KC, KA hinaus, nach allen möglichen Gegenden unbegrenzt, also vollkommen unendlich. Ist es also möglich, daß die zwischen zwo Grenzen, welche sich durch die Verkleinerung des Winkels AKC ohnehin immer mehr zusammenziehen lassen, eingeschlossene, mithin nur zum Theil unendliche, Fläche KAC eben so groß sey, als die von allen möglichen Grenzen freie, vollkommen unendliche ganze Ebene; so muß der Begriff des völlig Grenzenlosen unverändert bleiben, wenn man es gleich durch gewisse Grenzen einschränkt. Ueberhaupt, wenn man auch die unendliche Fläche KAC

durch erweitert, daß man ihre Grenze KC bis in die Lage KB, und von da bis KD dreht; so denkt man doch weder unter KAC + KCB, noch unter KAC + KCB + KBD die ganze unendliche Ebene. Dreht man aber KC durch KB und KD weiter, bis KC in die Lage KA kommt; so denkt man nun unter den vier unendlichen Flächen KAC + KCB + KBD + KDA wirklich die ganze unendliche Ebene. Also muß die unendliche Fläche KAC dadurch, daß sie vermittelst des Wegruckens der Grenze KC von der Grenze KA immer erweitert wird, zugleich immer größer werden, d. i. wenn der Winkel AKC wächst, so wächst auch die zwischen ihm eingeschlossene unendliche Fläche KAC, und diese wird nur denn erst der unendlichen Ebene gleich, wenn der Winkel AKC = 360° wird. Auf gleiche Art zeigt das Paar entgegengesetzter Kegel, die es allemal am Scheitel giebt, daß auch ein unendlich großer körperlicher Raum größer sey, als der andere. Denn wenn man sich die Axe des Kegels unendlich groß denkt, so ist auch der körperliche Raum eines jeden der beiden Kegel nach der Seite, wo die Axe ohne Ende fortgeht, unbegrenzt, folglich unendlich groß. Indessen ist derselbe doch von der Seitenfläche des Kegels ringsum begrenzt, und keiner von diesen beiden unendlichen Kegeln macht den ganzen unendlichen körperlichen Raum aus, sondern erst dann sind beide unendliche Kegel zusammengenommen mit dem ganzen auf allen

möglichen Seiten völlig unbegrenzten körperlichen Raum einerley, wenn in beiden der Winkel, den die Axe des Kegels mit der Seite desselben macht, ein rechter wird. Also ist hier wieder klar, daß auch ein unendlich großer körperlicher Raum, der innerhalb einem Kegel von einer unendlich großen Axe liegt, da er von seiner unendlichen Seitenfläche ringsum begrenzt ist, durch Vergrößerung des Winkels, den seine Axe mit seiner Seite macht, immer größer werden kann, bis dieser Winkel ein rechter wird, da denn beide am Scheitel entgegengesetzte Kegel zusammengenommen den ganzen vollkommen unendlichen körperlichen Raum ausmachen.

§. 34.

So ist es denn aus der Natur des Raums und der Zeit offenbar, daß das Unendlichgroße keinesweges nur eins, sondern daß selbst unter den unendlichen Größen in der That eine größer, als die andere ist, und daß also auch diese, ungeachtet ihrer Unendlichkeit, noch immerfort einer weitern Vermehrung fähig seyn können. Also ist der Eulersche Grundsatz: jede Größe kann ohne Ende vermehrt werden, auch in der That von unendlichen Größen gültig. Indessen zeigt eben diese Natur der Zeit und des Raums, daß derselbe nicht bei allen unendlichen Größen stattfindet, sondern daß es unter diesen wirklich solche giebt, die keiner weitern Vermehrung mehr fähig, sondern zugleich in ihrer Art das Größeste sind.

So ist die ganze verflossene und zukünftige unendliche Zeit zugleich die größeste mögliche Zeit, und dabei nur eine. So ist jede ganze nach beiden Seiten ohne Ende fortgehende gerade Linie die größeste mögliche gerade Linie, und jede ganze ringsum ohne Ende fortgehende Ebene die größeste mögliche Ebene, nur ist hier das Größeste keinesweges nur eins, sondern von dergleichen unendlichen Linien und Ebenen giebt es unendlich viele. So ist endlich der ganze, nach allen möglichen Gegenden unendliche, körperliche Raum nur einer, dem kein anderer mehr gleich ist, und daher unter allen möglichen unendlichen Größen, die der Mathematiker kennt, die allergrößeste. Wäre daher die Meinung, das Weltgebäude sey unendlich groß, richtig; so wäre dasselbe zugleich das allergrößeste mögliche, und seine wirkliche Ausdehnung keiner weitern Vermehrung fähig. Da es also in der Geometrie allerdings unendliche Größen giebt, die, im ganzen Umfange ihrer Möglichkeit betrachtet, schon den Begriff des Größesten in sich schließen; ja da es sogar eine Größe giebt, über die sich gar keine größere denken läßt, und die daher im absoluten Verstande die allergrößeste ist: so ist nun hieraus klar, daß der Eulersche Grundsatz, jede Größe könne ohne Ende vermehrt werden, obgleich derselbe nicht bloß von endlichen, sondern selbst von vielen unendlichen Größen gilt, dennoch, in völliger Allgemeinheit von jeder möglichen Größe behauptet, in der That unrichtig ist.

Allein

Allein ihn in einer solchen unumschränkten Allgemeinheit zu behaupten, war auch der Sinn des großen Eulers zuverlässig nicht, sondern seine Absicht ging offenbar nur dahin, zu zeigen, daß derjenige, der eine unendliche Menge behauptet, im Fortzählen bei keiner Zahl aufhören müsse, wozu gleichwol die Vertheidiger einfacher Theile in der Materie genöthigt wären. Er sahe also im Subjecte seines Grundsatzes offenbar bloß auf eine endliche Menge. Denn eine unendliche konnte er darunter nicht meynen, weil er diese bloß einseitig als eine ohne Ende wachsende Zahl von Einheiten betrachtete, ohne darauf zu sehen, ob nicht vielleicht dieselbe, als ein unbegrenztes Ganzes betrachtet, wieder von neuem zwey-, drey- und mehreremal genommen werden könnte, d. i. ob nicht, wenn man $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \sim = \infty$ setzt, auch 2∞, 3∞, $n\infty$ u. s. w. möglich sey. Und daß er unter der Größe, die nach seinem Grundsatze allemal ohne Ende vermehrt werden kann, keine andere, als eine endliche, wirklich verstanden habe, zeigen auch die Beispiele, durch welche er a. a. O. seinen Grundsatz zu erläutern sucht, aufs klärste an. Damit ein jeder, der auch seine Differentialrechnung nicht bei der Hand hat, sich hievon überzeugen könne, will ich die ganze Erläuterung, die er über denselben §. 73. giebt, hersetzen. Sie heißt wörtlich so: „In singulis quantitatum speciebus hoc etiam clarius perspicietur. Sic, nemo facile re-

perie-

perietur, qui statuerit, seriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c. ita usquam esse determinatam, ut ulterius continuari non possit. Nullus enim datur numerus, ad quem non insuper unitas addi, sicque numerus sequens maior exhiberi queat; hinc series numerorum naturalium sine fine progreditur, neque unquam pervenitur ad numerum maximum, quo maior prorsus non detur. Simili modo linea recta nunquam eo usque produci potest, ut insuper ulterius prolongari non posset. Quibus evincitur, tam numeros in infinitum augeri, quam lineas in infinitum produci posse. Quae cum sint species quantitatum, simul intelligitur, omni quantitate, quantumvis sit magna, adhuc dari maiorem, hacque denuo maiorem, sicque augendo continuo ulterius sine fine, hoc est, in infinitum procedi posse.„ Euler beruft sich also zum Beweise seines Grundsatzes auf nichts weiter, als auf endliche Zahlen und Linien. Zeigt er demnach hiedurch nicht deutlich, daß er in demselben keine andern, als endliche Größen und Zahlen im Sinne gehabt hat? Wie wenig er sich getrauet, von jeder Größe allgemein zu behaupten, daß sie noch einer weitern Vermehrung fähig seyn müsse, zeigt auch die Definition, die er im ersten Theil seiner vollständigen Einleitung zur Algebra §. 1. von der Größe giebt: „Eine Größe wird alles

„das=

„dasjenige genannt, welches einer Vermehrung „oder einer Verminderung fähig ist, oder wozu „sich noch etwas hinzusetzen, oder davon weg„nehmen läßt.„ Wäre diese disjunctive Bestimmung nicht offenbar ein logischer Fehler, wofern jede Größe überhaupt einer Vermehrung fähig wäre? Der berühmte Herr v. Wolf erklärt sich über diesen Punkt eben so zweideutig. In seinen Anfangsgründen der Algebra sagt er §. 6.: „Eine Größe nennen wir alles dasjenige, was sich „vermehren und vermindern läßt;„ mithin erfordert er hier zu jeder Größe beides, daß sie sowol einer Vermehrung als einer Verminderung fähig seyn müsse. Bald darauf aber sagt er §. 11., wo er sich auf diese Definition beruft: „alles, „was wir in der Welt antreffen und in uns selbst „finden, läßt sich als etwas, so vermehret oder „vermindert werden kann, d. i. als eine Größe „(§. 6.) betrachten;„ mithin fordert er hier von einer Größe nur eins von beiden, nemlich entweder Vermehrungs- oder Verminderungsfähigkeit. Ein klarer Beweis, daß dieser so große Logiker über diesen Punkt gleichfalls noch nicht vollkommen mit sich selber einig gewesen ist. Indessen mögen beide große Männer hierüber gedacht haben, wie sie wollen, so ist vermöge des Erwiesenen unleugbar, daß der Satz: eine jede Größe kann ohne Ende vermehrt werden, so allgemein er auch von allen endlichen Größen gilt, in Ansehung der unendlichen gleichwol bloß bei denen

richtig ist, die nicht im ganz uneingeschränkten Sinne unendlich d. i. nicht völlig unbegrenzt sind, sondern, ihrer absoluten Unendlichkeit ungeachtet, doch eine Grenze haben, über die sie noch immer weiter hinaus gehen können.

§. 35.

Da also der Ungrund der ersten Karstenschen Behauptung: das Unendlichgroße sey nur eins, am Tage liegt, so ist nunmehr auch die Richtigkeit der zweiten, welche Hr. Karsten unmittelbar aus jener folgert, nemlich: daß unendliche Größen sich gar nicht vergleichen lassen, und daher eine unendliche Größe weder größer, noch kleiner, noch eben so groß als die andere sey, um so einleuchtender. Dieses ist der zweite Riese, der meine Theorie der Parallelen völlig zermalmen soll. Nur Schade, daß, da man den ersten doch wenigstens als ein Phantom betrachten kann, dieser gar ein vollkommenes Unding ist. Man denke nicht, daß ich dem berühmten Manne etwa durch einen Mißverstand seiner Ausdrücke eine solche Behauptung andichte. Ich gestehe es freilich, daß ich kaum meinen Augen trauete, da ich dieselbe in der zweiten seiner mathematischen Abhandlungen, von den Parallellinien, §. 55. S. 175. zu Gesichte bekam. Hier sind indessen seine eigenen klaren Worte, durch welche er daselbst meinen Lehrsatz, daß die unendliche Fläche eines größern Winkels größer sey, als die eines kleinern,

in

in vollem Ernste zu widerlegen meynt: „Unbe„grenzte Flächen kann man nicht vergleichen, „die eine ist weder größer, noch kleiner, noch „eben so groß als die andere. Größen, die „man vergleichen soll, müssen endlich seyn: un„endliche Größen lassen sich gar nicht vergleichen.„ Eben so klar und unzweideutig druckt er sich hierüber auch in andern Stellen, besonders aber §. 72. S. 196. aus. Ich hatte nemlich bewiesen, daß derjenige Theil einer völlig unendlichen Linie, der von einem gewissen Punkte an nur nach einer Seite unendlich ist, eben so groß sey, als der entgegengesetzte Theil von ihr, der von demselben Punkte an nur nach der entgegengesetzten Seite unendlich ist, z. B. daß (Fig. 2.) die unendliche AC eben so groß sey, als die unendliche AD. Hier sagt nun Hr. Karsten ganz bestimmt: „Nach meinen Begriffen, die ich in „der vorstehenden Abhandlung umständlicher vor„getragen habe, ist AC weder eben so groß, „noch größer, noch kleiner als AD. Unbe„grenzte, oder, wenn man will, unendliche Grö„ßen lassen sich gar nicht mit einander vergleichen.„ So sollen dann in der That homogene Größen, z. B. ein paar Linien, oder ein paar Flächen, möglich seyn, die sich gar nicht vergleichen lassen, und die also weder gleich, noch ungleich sind, und dieses soll jeder gründlich und richtig denkende Mathematiker ohne allen Beweis für wahr erkennen und glauben, weil es Hr. Karsten so will.

Herr Karsten druckt sich darüber, daß ich es für dienlich erkläre, den Lehrling der Geometrie mit dem Unendlichgroßen, auf das er doch schon bei dem ersten Postulate des Euklides und der Erklärung des Winkels, wenn er ein denkender Kopf ist, von selbst kommen muß, gleich im Anfange einigermaaßen bekannt zu machen, in seinem gerechten Eifer a. a. O. §. 71. S. 194. gegen mich also aus: „künftig wird die Evidenz der Geome„trie darin bestehen, daß man mit Begriffen an„fängt, die **wider** allen gesunden **Menschen„verstand** sind.„ Um daher den Anfänger in der Geometrie vor dem Gift meiner einmal ausgestreuten Ketzerey zu verwahren, wird es nunmehr wol höchstnöthig seyn, ihn unverzüglich zu belehren, daß Größen NB. **von einerley Art** möglich seyn, die weder **gleich**, noch **ungleich**, sondern eben solche disparata sind, als Linie und Fläche, als Elle und Pfund. Aber wenn diese Lehre ein **wirklich ächter mathematischer Grundsatz** wäre, so würde ich mich verpflichtet halten, ohne allen Eifer aus voller Ueberzeugung zu sagen, daß in diesem Falle das Studium der Mathematik das wahre Grab der Vernunft seyn würde, denn eine höhere Verleugnung derselben kann kein Aberglaube fordern. Wenn Hr. Karsten sagt, das Unendlichgroße sey nur eins, so hat dieses doch wenigstens einen Sinn. Niemand wird ihm dieses, so zweideutig auch der Ausdruck ist, so auslegen, als sey untern andern im ganzen Raum

nur

nur eine einzige Linie möglich, die man unendlich groß nennen könne, als sey z. B. zwar die Tangente eines rechten Winkels, aber nicht seine Secante unendlich groß, sondern jeder billig denkende wird seine Meinung so erklären: das Unendlichgroße sey das Maximum aller Größe, man könne also nicht sagen: von zwo gleichartigen unendlichen Größen sey eine größer, als die andere, sondern die Größe einer jeden von ihnen sey einerley, also nur eine, und da Hr. Karsten besonders auf die unendliche Menge Rücksicht nimmt, so wird jeder billig denkende mit dem Hrn. Hofr. Kästner ihn auch hier so verstehen: die unendliche Menge ist das non plus ultra aller Menge, so wie die Null das völlige Aufheben aller Menge und aller Zahl ist, und wenn man daher die unendliche Menge durch ∞ ausdruckt, so versteht man unter 2∞ nichts mehr, als was man unter ∞ versteht, so wie man unter 2 · 0 nichts mehr, als unter 0 versteht. Diese Behauptung verdient, da sie wenigstens einigen Schein hat, allerdings eine nähere Untersuchung, und es war daher nöthig, ihren Ungrund deutlich aufzudecken. Allein wenn Hr. Karsten dieselbe so weit ausdehnt, daß eine unendliche Größe einer andern gleichartigen, und eine unendliche Menge der andern auch nicht einmal gleich seyn soll, da doch beide, nach seiner eigenen Annahme, nur eins und also ganz einerley sind; so ist dieses ein Satz, der gar keinen Sinn hat, sondern theils sich selbst

widerspricht, theils auch die beiden obersten Grundsätze der Mathematik aufhebt. Denn zwo gleichartige unendliche Größen können entweder ungleich seyn, oder nicht. Können sie ungleich seyn, so können sie auch gleich seyn, denn hier darf man nur ihre Differenz zur kleinern addiren, oder von der größern subtrahiren. Können also unendliche Größen, wie bereits erwiesen worden, ungleich seyn, so ist der Satz, daß keine Gleichheit zwischen ihnen stattfindet, widersprechend. Allein man nehme auch mit Hr. Karsten an, daß unendliche Größen nicht ungleich seyn könnten; so heißt dieses doch, nach den Begriffen aller Mathematiker und des Hrn. Karsten selbst *), so viel: sie können in Absicht auf ihre Größe nicht verschieden seyn. Nun aber sind sie nach Hr. Karstens eigener Behauptung nichts Widersprechendes, Nullen aber gleichfalls nicht, folglich sind sie Dinge, die eine Größe haben. Können sie daher in Absicht auf ihre Größe nicht verschieden seyn, so müssen sie in Absicht auf dieselbe einerley seyn. Dieses aber heißt nach den Begriffen aller Mathematiker und des Hrn. Karstens selbst †): sie müssen einander gleich seyn. Also heißt der Satz des Hrn. Karsten: unendliche Größen können einander nicht gleich seyn, nach seinen eigenen Begriffen so viel: sie müssen nothwendig einander gleich

*) Karstens Lehrbegriff der gesammten Mathematik, erster Theil, Anf. d. Rechenk. §. 7.

†) a. a. O.

gleich seyn. Man mag also den Satz, daß zwischen unendlichen Größen keine Ungleichheit stattfindet, bejahen oder verneinen, so ist doch der Satz, daß sie einander auch nicht gleich seyn können, in allen Fällen ein sich selbst widersprechender Satz. Ferner sind nach Hr. Karstens eigener Behauptung die Tangente und Secante eines Winkels von 90° beide unendlich groß. Nun ist, wie bereits §. 18. n. 3. gezeigt worden, eben dieselbe Linie AB (Fig. 1.), welche die Tangente eines Winkels von 90° ist, für eben denselben Sinus totus zugleich seine Secante. Können also unendliche Linien nicht gleich seyn, so kann auch nicht AB = AB seyn. Also hebt der Karstensche Satz auch zweitens den obersten Grundsatz der ganzen Mathematik auf, daß nemlich jede Größe sich selber gleich sey, der doch, wie Hr. Karsten selbst *) lehret, nichts anders als der Satz des Widerspruchs selbst ist. Drittens läßt sich jede endliche Linie AB (Fig. 2.) so wohl auf die unendliche AD, als auf die unendliche AC mehrere mal auftragen, als jede Zahl beträgt, d. i. ∞ mal, folglich ist so wohl AD = ∞ · AB, als auch AC = ∞ · AB. Nun ist in beiden Sätzen der Factor AB eben dieselbe Linie, und der Factor ∞ ist, nach Hr. Karsten, in beiden auch nur einer, folglich eben dieselbe unendliche Menge. Gleichwol kann, nach Hr. Karstens Satz, nicht

 AD

*) Karstens Lehrbegr. d. gesammten Math. erster Theil. Anf. d. Rechenk. §. 9.

AD = AC seyn. Also hebt derselbe auch den zweiten obersten Grundsatz der ganzen Mathematik auf: daß nemlich zwo Größen, die einer dritten gleich sind, einander selbst gleich seyn. Ueberhaupt trägt kein Mathematiker das mindeste Bedenken, sogar eine Null der andern gleich zu setzen, weil alle Nullen in Absicht auf ihre Größe einerley sind, nemlich weil sie keine Größe haben. Niemand leugnet, daß 2 — 2 = 8 — 8, und a — a = b — b, folglich 0 = 0 ist, obgleich die Null nur eine ist. Und das Unendliche, von welchem Hr. Karsten doch bloß aus einer vermeinten Analogie, die es mit der Null haben soll, schließt, es sey nur eins, soll gleichwol nicht einmal einem andern von eben der Art gleich seyn können. Man soll gar nicht einmal fragen können: sind die unendlichen Linien AD, AC (Fig. 2.) gleich oder ungleich? ist die unendliche Fläche KAC (Fig. 4.), die doch offenbar nur ein Theil der ganzen unendlichen Ebene ist, eben so groß, oder größer, oder kleiner, als letztere? Gleichartige Größen, Linien und Linien, Flächen und Flächen, sollen völlig eben so disparat und unvergleichbar seyn, als Linie und Punkt, als Fläche und Linie? Wer sich dieses vorstellen kann, der wird freilich ohne Mühe alles, auch runde Vierecke, und sechseckichte Kreise denken können. War es also in der That der Geist Euklids, der Herrn Karsten bei dieser Entdeckung beseelte, und war es Euklids Schatten, der ihn beunruhigte, durch

Bekanntmachung derselben meine gefährliche Theorie der Parallelen auf einmal zu zernichten; so darf ich mich eben nicht betrüben, daß, nach seinem Lobspruch, Euklidens Geist nicht auf mir ruht.

§. 36.

Nachdem nunmehr der Begriff des Unendlichgroßen sorgfältig zergliedert, die Realität desselben aus der Natur des Raums und der Zeit ausführlich erwiesen, und zugleich gezeigt worden, daß auch unter unendlichen Größen eine Ungleichheit stattfindet; so frägt es sich jetzo, was es mit den Ausdrücken des Unendlichen, auf welche die allgemeine Rechenkunst führt, eigentlich für eine Bewandtniß habe. Man druckt insgemein jedes Unendlichgroße durch eben dasselbe Zeichen ∞ aus. Allein, da das Unendliche nicht immer von einerley Größe ist, so ist leicht einzusehen, daß hiedurch nothwendig Verwirrung entstehen, und zugleich die Vergleichung der unendlichen Größen unter einander beinahe unmöglich werden muß. Es wird also vor allen Dingen nöthig seyn, den Werth, welchen man dem Ausdrucke ∞ beilegt, genau zu bestimmen, um den Werth jedes andern Unendlichen mit demselben vergleichen zu können. Da nun eine unendliche Menge eigentlich eine solche Menge von Einern bedeutet, die größer ist, als jede endliche Menge von Einern, d. i. als jede ganze Zahl; mithin ein ohne Ende fortgesetztes Addiren der Zahl Eins erfordert; so scheint es mir die Na-

tur der Sache zu fordern, bloß die Summe der unendlichen Reihe: $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \sim = \infty$ zu setzen, und hiernach den Werth einer jeden andern unendlichen Menge zu bestimmen. Wenigstens wüßte ich keine unendliche Reihe, deren Summe mehr Anspruch hätte, zum Maaße aller übrigen unendlichen Mengen gewählt zu werden. Wenn man in einer Reihe Zahlen, die man sich von einem ersten Gliede an ohne Ende fortgehend vorstellt, z. B. in der Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots \sim$ bloß auf die unendliche Menge der Glieder sieht, ohne auf die Zahlen selbst Rücksicht zu nehmen; so ist offenbar, daß man sich diese nie anders als unter der unendlichen Summe $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \sim$ vorstellt. Wenn ich daher im Folgenden den simplen Ausdruck ∞ gebrauche, so verstehe ich darunter nie etwas andres, als die unendliche Summe $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \sim$.

§. 37.

Hier ist nun zuerst klar, daß, wenn man diese unendliche Summe, als ein Ganzes betrachtet, 2, 3, oder überhaupt n mal nimmt, man darunter 2, 3, oder überhaupt n mal mehr denkt, nemlich da man

$$\overset{\displaystyle A}{C \sim \ldots + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \sim B}$$

unter der Summe der Reihe von Einern, die von A nach B ohne Ende fortgeht, ganz und gar eben

das=

dasselbe denkt, was man unter der Summe der von A nach C ohne Ende fortgehenden Reihe von Einern denkt; so ist offenbar die Reihe von A nach C eben so groß, als die von A nach B, und daher beide zusammen zweymal so groß, als eine, also $2(1+1+1+1+\ldots\sim) = 2\infty$. Eben so ist auch klar, daß die unendliche Reihe Einer, die von A nach einer andern Gegend D fortgienge, eben so groß seyn würde, als die von A nach B oder C, und daher $3(1+1+1+\ldots)$ $= 3\infty$, und so überhaupt $n(1+1+1+\ldots\sim)$ $= n\infty$ ist, wenn man nemlich die Summe $1+1+1+\ldots\sim$ NB. als ein Ganzes betrachtet, das nmal genommen wird. So ist z. B. die endliche Linie KL (Fig. 4.) in jeder von den unendlichen Linien KA, KB, KC so vielmal enthalten, als die Summe $1+1+1+1+\ldots\sim$ beträgt, d. i. ∞ mal. Setzt man daher $KA = \infty \cdot KL$, so ist $KA + KB = 2\infty \cdot KL$, und $KA + KB + KC = 3\infty \cdot KL$. Dagegen ist, so viel ich einsehe, von keiner ohne Ende fortgehenden Reihe Zahlen die unendliche Summe größer, oder kleiner, als die unendliche Summe $1+1+1+\ldots\sim$. Denn die unendliche Summe dieser Reihe kann doch immer nur eine und eben dieselbe seyn. Nun nehme man irgend eine andere Reihe Zahlen, deren Summe unendlich groß ist, z. B. $2+2+2+\ldots\sim$; so ist jedes Glied derselben $= 1+1$. Setzt man also statt 2 überall $1+1$; so hat man wiederum die

unendliche Reihe $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \sim$, also ist $2 + 2 + \ldots \sim = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \sim = \infty$. Wollte also jemand sagen, die unendliche Summe von $2 + 2 + 2 + \ldots \sim$ wäre $= 2\infty$; so müßte die Reihe $2 + 2 + 2 \ldots \sim$ die Summe ∞ zweymal früher erreichen, als die Reihe $1 + 1 + 1 + \ldots \sim$, d. i. die ohne Ende fortgehende Reihe $2 + 2 + 2 + \ldots \sim$ müßte schon auf dem halben Wege der Reihe $1 + 1 + 1 + \ldots \sim$ ihr Ende erreicht haben, und so müßte auch die Menge der Glieder in der letztern Reihe hier schon unendlich groß seyn, mithin ihren Fortgang schon einmal geendigt haben, und von da gleichwol noch von neuem einen zweiten unendlichen Fortgang anheben. Eben dieses gilt auch von der Summe jeder andern unendlichen Reihe ganzer Zahlen, zum Beispiel $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots \sim$. Denn, setzt man statt jeder Zahl ihre Einer, z. B. $1 + 1 + 1$ statt 3, $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ statt 5 u. s. w., so hat man wieder die Reihe $1 + 1 + 1 + \ldots \sim$. Allein, ein gleiches gilt auch von allen Brüchen; denn, soll eine unendliche Reihe Brüche eine unendliche Summe ausmachen, so müssen sich immer so viele zusammennehmen lassen, daß man daraus die Reihe $1 + 1 + 1 + \ldots \sim$ hervorbringen kann. Es sey z. B. die unendliche Reihe: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots \sim$; so geben jede 3 Glieder die Zahl 1. Wäre die Reihe $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} + \frac{27}{2} \ldots \sim$; so kann man statt

der

der beiden ersten Glieder 1 + 1, statt des dritten und vierten 18 Einer setzen, u. s. w. Will man sich hievon noch deutlicher überführen, so darf man nur auf die Natur einer einen Anfangspunkt A habenden unendlichen geraden Linie AD (Fig. 2.) sehen. Hier ist offenbar, daß die endliche Linie AB sich auf dieselbe unendlich viele mal auftragen läßt. Nun nehme man irgend eine andere Linie, die, wie AE, größer, oder, wie AF, kleiner, als AB ist; so läßt sich jede von diesen wiederum unendlich viele mal auftragen. Nun setze man, von den Summen der unendlichen Reihen:

$$AB + AB + AB + \ldots\ldots \sim$$
$$AE + AE + AE + \ldots\ldots \sim$$
$$AF + AF + AF + \ldots\ldots \sim$$

wäre die zweite größer, und die dritte kleiner, als die erste; so müßte die unendliche Linie, welche die zweite Summe ausmacht, größer, und diejenige, welche die dritte ausmacht, kleiner als die seyn, welche die erste ausmacht. Also müßten von A durch F drey ungleiche unendliche gerade Linien möglich seyn. Da nun dieses widersprechend, und von A durch F nur eine einzige gerade Linie möglich ist; so ist klar, daß in allen diesen drey Reihen die unendliche Summe eben dieselbe, nemlich $= 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \sim$ ist, wenn man AB $= 1$ setzt, obgleich alsdenn AE > 1, und AF < 1 ist. Und hieraus folgt zugleich,

gleich, daß, wenn man $\infty = 1 + 1 + 1 + \ldots \sim$ setzt, jede unendliche gerade Linie, die von einem Punkte an nur nach einer Seite ohne Ende fortgeht, z. B. die unendliche AD, $= \infty a$ sey, man mag unter a eine noch so große, oder noch so kleine endliche gerade Linie AB verstehen.

§. 38.

Indessen ist es nicht genug, daß jede unendliche Summe einer irgendwo anfangenden Reihe von Zahlen $= 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \sim$ ist, die Glieder derselben mögen noch so viel größer, oder kleiner, als 1 seyn; sondern eben diese unendliche Summe von Einern läßt sich auch nicht weiter in eine endliche Anzahl gleicher Theile theilen; denn gesetzt, man wollte sich die Hälfte, ein Drittel, oder überhaupt den nten Theil von ihr denken, so müßte man nothwendig, um ihn zu bekommen, bei irgend einem Gliede 1 in der Reihe stehen bleiben, folglich wäre der verlangte nte Theil von ihr die Summe einer endlichen Menge von Einern, d. i. eine ganze endliche Zahl. Da diese nun, vermöge der Annahme, der nte Theil von der unendlichen Summe seyn soll, so muß sie nmal genommen die unendliche Summe geben, d. i. eine endliche Zahl durch eine andere endliche n multiplicirt muß ein unendliches Product geben. Da nun dieses widersprechend ist, so läßt sich die unendliche Summe der Reihe $1 + 1 + 1 + \ldots \sim$ nicht weiter in irgend eine Anzahl gleicher Theile thei-

theilen. Druckt man also gedachte Summe durch ∞ aus, so ist zwar $n\infty$ möglich (§. 37.), aber nicht $\frac{1}{n}\infty$. Also ist die unendliche Summe der Reihe $1 + 1 + 1 + \ldots \sim$ zugleich unter allen möglichen unendlichen Mengen die allereinfachste und erste, mithin die Basis aller übrigen, und so ist offenbar, daß dieselbe, schon ihrer Natur nach, zum Maaße aller übrigen angenommen werden muß.

§. 39.

Nach den Regeln der Division ist $\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots \sim$, folglich bekommt man eine Reihe Zahlen, die ohne Ende fortgehen muß, wenn ihre Summe den Quotienten $\frac{1}{1 - x}$ geben soll. Daß sie in diesem Fall der wahre Quotient ist, ist klar; denn, wenn man sie durch den Divisor $1 - x$ multiplicirt, so kommt wirklich der Dividend 1 heraus, wie folgende Multiplication zeigt.

$$\begin{array}{l} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots \sim \\ 1 - x \\ \hline 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots \sim \\ \quad - x - x^2 - x^3 - x^4 - \ldots\ldots \sim \\ \hline 1 \end{array}$$

Nimmt

Nimmt man aber nur eine gewisse endliche Zahl von Gliedern, z. B. n; so ist das letzte Glied x^{n-1}, und der Rest, der nach dem nten Gliede übrig bleibt, ist $+x^n$, also muß in diesem Fall noch der Bruch $\frac{x^n}{1-x}$ zur Reihe hinzu addirt werden, wenn sie den wahren Quotienten geben soll. Da man nun für x eine Zahl annehmen kann, welche man will; so setze man erstlich $x < 1$, d. i. x sey ein ächter Bruch, so wird $\frac{x^n}{1-x}$ immer kleiner, je weiter man die gefundene Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ fortsetzt, folglich nähert sich ihre Summe immer mehr dem wahren Quotienten, und man kann daher jede ganze und vermischte Zahl $\frac{r}{m}$, wo $r > m$ ist, durch eine convergirende unendliche Reihe ausdrucken, wenn man $x = \frac{r-m}{r}$ setzt. Will man nemlich eine ganze Zahl so ausdrucken, so darf man dieselbe nur $= r$, und $m = 1$ setzen; so wird $x = \frac{r-1}{r}$, z. B. man setze $r = 2$, so ist $x = \frac{1}{2}$, folglich $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots \sim$.

Ist $r = 3$, so ist $x = \frac{2}{3}$; also $3 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \ldots\ldots \sim$.

Wollte man aber eine vermischte Zahl, z. B. $\frac{5}{3}$, durch eine unendliche Reihe ausdrucken, so ist

$$r = 5,\ m = 3,\ \text{folglich } x = \frac{2}{5},$$

also $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \ldots\ldots \sim.$

Nimmt man dagegen $x > 1$, so wird die Zahl $\frac{1}{1-x}$ negativ, und man bekommt für sie eine Reihe, die dem ersten Anblick nach ganz ungereimt scheint. Z. B. wenn man $x = 2$ setzt, so ist

$$\frac{1}{-1} = -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

für $x = 3$ ist $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \ldots\ldots$

Hier zeigen sich zwey Paradoxa. Erstlich soll eine negative Zahl -1, oder $-\frac{1}{2}$, die Summe von lauter positiven, und zweitens soll eine endliche Zahl -1, oder $-\frac{1}{2}$, unendlich groß seyn. Zu diesen zwey Paradoxis fügten einige noch das dritte hinzu, daß die Summe einer jeden von diesen unendlichen Reihen, weil die Glieder immer wachsen, noch mehr als unendlich groß seyn müsse; und da sie zugleich die negativen Zahlen für weniger als Nichts hielten, so erzeugte dieses zugleich das vierte, daß weniger als Nichts mehr als unendlich viel seyn könne, und daß also der, der sein ganzes Capital verzehrt

und

und noch Schulden dazu gemacht hat, noch mehr als ein unendlich großes Vermögen besitzt. Eine erhabene Aufmunterung für muthwillige Schuldenmacher —! Das paradoxeste unter allen aber ist, daß es wirklich Männer von Gewicht und Ansehen gegeben, die alles dieses für wahr annahmen, und sich dadurch zu helfen meineten, daß sie einen Unterschied zwischen simpeln Negativzahlen, wie -1, $-\frac{1}{2}$, und solchen, die Quotienten, wie $\frac{1}{-1}$, $\frac{1}{-2}$, wären, zu machen suchten, und jene für endlich, diese aber für mehr als unendlich hielten, und daher glaubten, daß jene positiven Reihen eben durch den Uebergang aus dem Unendlichen ins Mehr als unendliche, ins Negative, übergiengen, und daher eine negative Summe lieferten. Allein, ohne daran zu denken, wie sehr Behauptungen, die dem Verstande solche Gewalt thun, jeden, der den erhabenen Werth der Analysis noch nicht gehörig kennt, von ihr zurückscheuchen müssen, ohne daran zu denken, daß, wenn 1 durch -1 dividirt, nicht nur die endliche negative Zahl -1, sondern auch eine unendliche, ja mehr als unendliche, positive Zahl zum Quotienten haben kann, die Sicherheit der ganzen Analysis wegfiele; so hat der große Euler die Richtigkeit des Grundes, durch welchen man jene Behauptungen zu rechtfertigen suchte, hinlänglich aufgedeckt, da er (Inst. Calc. Diff. P. I. §. 194.) bemerkt, daß auch die positive Zahl

$$1 = \frac{1}{+1} = \frac{1}{(1-2)^2} = 1 + 4 + 12 +$$

$32 + 80 +$ &c. ist, mithin müßte auch eine endliche positive Zahl größer als unendlich seyn können, ohne durch den Uebergang ins mehr als Unendliche negativ zu werden. Außer diesem aber wird es, da das mehr als Unendliche noch immer so manchen guten Kopf verwirrt, nicht unnütz seyn, die schon von andern bemerkte Unschicklichkeit dieses Begriffs zu wiederholen, da bereits im Vorhergehenden gezeigt worden, wie es nicht nur unendliche Mengen von verschiedener Größe giebt, sondern daß auch, wie gerade hier der Fall ist, die unendliche Summe einer wachsenden Reihe immer mit der Summe der unendlichen Reihe $1 + 1 + 1 + \ldots$ ganz einerley ist. Indessen würden, obgleich die beiden letzten Paradoxa hiedurch wegfallen, doch nicht nur die beiden ersten bleiben, sondern es würde zu ihnen noch das dritte hinzu kommen, daß $-1 = -2$ wäre, und so sieht man wol, daß noch ein ganz anderes Mißverständniß daseyn müsse, das diese ungereimten Folgerungen veranlaßt. Dieses haben die neuern Analysten auch bereits glücklich ausgespäht, und gezeigt, daß dasselbe lediglich in dem vorhin angezeigten Bruch $\frac{x^n}{1-x}$ liegt, der zu n Gliedern, die man in der Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ nimmt, jedesmal noch

hinzugesetzt werden muß, um den wahren Quotienten $\frac{1}{1-x}$ zu bekommen. Denn da hier $x > 1$ ist, so wird $\frac{x^n}{1-x}$ negativ, und zugleich immer größer, je höher die Zahl der Glieder steigt. Ist also z. B. $x = 2$, und man nimmt 1000 Glieder; so ist der Bruch $\frac{x^n}{1-x} = \frac{2^{1000}}{-1} = -2^{1000}$, allein die Summe der Reihe $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$ für 1000 Glieder ist $= 2^{1000} - 1$. Addirt man daher zu derselben die Zahl -2^{1000} hinzu; so ist die Summe $= -1 = \frac{1}{1-2}$ gerade so, wie sie seyn soll. Es ist also hieraus klar, daß in dem Quotienten $\frac{1}{1-x}$ für den Fall, da $x > 1$, folglich $1 - x$ negativ wird, die positive Reihe $1 + x + x^2 + \ldots$ divergirend ist, und daher bei aller ihrer Richtigkeit und Brauchbarkeit doch gar nicht dazu tauglich ist, als unendliche Summe den wahren Werth des Quotienten auszudrucken; denn, anstatt sich dem wahren Quotienten immer mehr zu nähern, entfernt sie sich vielmehr immer weiter von ihm, indem die noch fehlende Zahl $\frac{x^n}{1-x}$, die als eine negative von ihr abgezogen werden muß, um den wahren Quotienten

zu

zu haben, immer größer wird. Wollte man daher z. B. die Reihe $1 + 2 + 4 + 8 \ldots\ldots = \frac{1}{-1}$ wirklich als unendlich nehmen, und die Zahl der Glieder $= \infty$ setzen, so wäre das unendlichste Glied $= 2^{\infty - 1}$, folglich die Summe der ganzen Reihe $= 2^{\infty} - 1$. Hier fehlte aber noch der zu addirende Bruch $\frac{x^n}{1 - x} = -2^{\infty}$. Addirt man daher diesen, so hat man wirklich den wahren Quotienten $-1 = \frac{1}{-1}$, und es ist also die Richtigkeit der gefundenen Reihe klar. Allein es ist auch eben hieraus offenbar, daß ihre unendliche Summe den wahren Quotienten um 2^{∞} übersteigt, und ihn also an sich nicht geben kann, sondern erst dann, wenn man den Bruch $\frac{x^n}{1 - x} = -2^{\infty}$ zu ihr addirt. Auf eben diese Art lassen sich auch alle die scheinbaren Paradoxa heben, die bei andern dergleichen divergirenden Reihen vorkommen.

§. 40.

Wir haben den Quotienten $\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots$ für die Fälle betrachtet, da x kleiner, oder größer, als 1 ist. Setzt man endlich

$x = 1$, so hat man $\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + \ldots \sim$, und eben diese Reihe findet man auch, wenn man 1 durch $1 - 1$ unmittelbar dividirt. Also ist $\frac{1}{0} = \infty$, und so haben wir zugleich für den Werth der unendlichen Menge ∞ oder $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ einen bestimmten arithmetischen Ausdruck $\frac{1}{0}$.

Da nun diesem zu Folge $\infty : 1 = 1 : 0$ ist, so ist $\infty + 1 : 1 = 1 + 0 : 0 = 1 : 0$, folglich $\frac{\infty + 1}{1} = \frac{1}{0}$. Also ist auch $\infty + 1 = \infty$. Da ferner $\infty + 1 : 1 = 1 : 0$; so ist $\infty + 1 + 1 : 1 = 1 + 0 : 0$, folglich $\infty + 2 : 1 = 1 : 0$, also auch $\infty + 2 = \infty$, und eben so ist klar, daß $\infty + 3$, $\infty + 4$, und überhaupt $\infty + n = \infty$ sey, so groß auch die Zahl n seyn mag. Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich auch unmittelbar erkennen, wenn man 1 durch $1 - 1$ wirklich dividirt. Denn man mag im Quotienten $1 + 1 + 1 + \ldots$ so viel Glieder nehmen, als man will; so bleibt im Rest immer $+ 1$, folglich ist der zu addirende Bruch immerfort $= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$. Nimmt man also nur 1 Glied; so ist $\frac{1}{0} = 1 + \frac{1}{0}$. Nimmt man 2 Glieder; so ist $\frac{1}{0} = 1 + 1 + \frac{1}{0} = 2 + \frac{1}{0}$. Nimmt man 3 Glieder, so ist $\frac{1}{0} = 3 + \frac{1}{0}$; und überhaupt, wenn man n Glieder nimmt, so ist $\frac{1}{0} = n + \frac{1}{0}$. Also wird $\frac{1}{0}$ gar

gar nicht vergrößert, wenn man eine endliche Zahl zu ihr addirt; so groß auch diese seyn mag. Da also $\infty = \infty + n$ ist, so ist auch $\infty - n = \infty$, imgleichen $\frac{1}{0} - n = \frac{1}{0}$. Also bleibt die Größe einer unendlichen Menge immer dieselbe, man mag irgend eine endliche Zahl zu ihr addiren, oder von ihr subtrahiren; und man mag also von der unendlichen Reihe:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \sim$$

noch so viele Einer von vorne wegnehmen, oder nach der linken Seite zu ihr hinzu setzen, so bleibt ihre Summe einerley, und die unendliche Menge ∞ immer dieselbe.

§. 41.

Da $\infty : 1 = 1 : 0$ ist (§. 40.), so ist $1 : \infty = 0 : 1$, folglich $\frac{1}{\infty} = \frac{0}{1}$. Da nun zuverlässig $\frac{0}{1} = 0$, so ist $\frac{1}{\infty} = 0$. Ist daher der Satz $\frac{1}{0} = \infty$ allgemein wahr, so muß auch der Satz $\frac{1}{\infty} = 0$ allgemein wahr seyn. Die allgemeine Richtigkeit desselben erhellt auch unmittelbar, wenn man 1 durch die unendliche Menge $1 + 1 + 1 + \ldots\ldots$ wirklich dividirt, wie folgt:

$$1+1+1+\ldots)\ 1\ (1-1$$
$$\underline{1+1+1+\ldots\sim}$$
$$-1-1-\ldots\sim$$
$$\underline{-1-1-\ldots\sim}$$
$$0$$

Also ist $\frac{1}{\infty} = 1 - 1 = 0$. Da nun der Ausdruck $\frac{1}{\infty}$ den unendlichvielten Theil von 1 bedeutet; so heißt der Satz: $\frac{1}{\infty} = 0$, eigentlich so viel: der unendlichvielte Theil von 1 ist kein Theil von 1, sondern als Theil betrachtet ein Unding, und so erhellt hieraus von neuem die Richtigkeit des §. 13. n. 2. erwiesenen Satzes, daß der unendlichvielte Theil einer endlichen Größe ein Unding ist. So ist z. B. der unendlichvielte Theil einer Linie keine Linie, sondern ein Punkt.

§. 42.

Euler hat bekanntlich auch diesen Satz, daß allemal $\frac{1}{\infty} = 0$ sey, bereits in seinen Inst. Calc. Diff. vorgetragen, und Hr. Hofrath Karsten behauptet ihn in seinen mathematischen Abhandl. gleichfalls als allgemein richtig. Da indessen die Allgemeinheit desselben noch immer von vielen

Analysten bezweifelt wird; so erfordert es die Billigkeit, die wichtigsten Gründe, welche dieselbe zweifelhaft zu machen scheinen, näher zu untersuchen.

Zuerst scheint schon die asymptotische Fläche der gleichseitigen Hyperbel die Allgemeinheit des Satzes $\frac{1}{\infty} = 0$ zu widerlegen. Denn hier ist $tu = 1$, folglich $u = \frac{1}{t}$. Gleichwol, sagt man, werde nie die Ordinate $u = 0$, wenn auch die Absciſſe $t = \infty$ wird. Allein dieser Einwurf fällt schon dadurch weg, weil die Ordinate einer unendlichen Absciſſe ein Unding und Widerspruch ist (§. 9. n. 4.). Doch, selbst dieses bei Seite gesetzt, so heißt der Satz: die Ordinate u wird niemals $= 0$, offenbar nichts weiter, als: Asymptote und Hyperbel kommen in keiner endlichen Weite zusammen, d. i. so lange noch die Absciſſe t endlich ist, ob sie sich gleich beständig nähern. Denn mehr sagt die Gleichung $u = \frac{1}{t}$ nicht, als daß u nie $= 0$ werde, so lange t endlich ist. Also ist die Behauptung, daß u auch denn nicht $= 0$ werde, wenn $t = \infty$ wird, unerwiesen.

Ferner setze man $b = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, und $n = \infty$. Wäre hier $\frac{1}{\infty}$ genau $= 0$, so wäre auch $1 + \frac{1}{\infty} = 1$, und da 1^∞ gewiß $= 1$ ist, auch $\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty = 1$, und doch ist, wenn $n = \infty$ ist, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots\ldots = 2,7182\ldots$ nemlich die Grundzahl des natürlichen Logarithmen-Systems, also kann wol $\frac{1}{\infty}$ nicht genau $= 0$ seyn. Dieser Einwurf, welchen der scharfsinnige Recensent der Karstenschen mathem. Abhandlungen im 20sten Stück der N. Leipziger Gel. Zeitungen 1787 gleichfalls macht, ist allerdings sehr scheinbar. Denn es ist unleugbar sowol $1^\infty = 1$, als auch, wenn man $n = \infty$ setzt, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182\ldots\ldots$ Indessen folgt doch daraus so wenig, daß $\frac{1}{\infty}$ nicht genau $= 0$ sey, daß hiedurch vielmehr der Satz: $\frac{1}{\infty}$ ist genau $= 0$, eine neue Bestätigung

erhält. Denn da $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \times \frac{1}{n^3} + \ldots = 2 + \frac{n-1}{2n} + \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{6n^2} + \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{24n^3} + \ldots$; so ist klar, daß $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = b$ immer größer wird, je größer n und je kleiner $\frac{1}{n}$ wird. Denn, setzt man z. B. $n = 10$, so ist $b = 2{,}593\ldots$. Setzt man $n = 100$, so ist $b = 2{,}704\ldots$. Setzt man $n = 1000$, so ist $b = 2{,}717\ldots$. Also erhält b erst dann seinen größtmöglichen Werth, wenn n am größesten und $\frac{1}{n}$ am kleinsten wird, d. i. wenn $n = \infty$, und $\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty}$ wird. Mithin ist offenbar, daß, wenn man den Werth von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für $n = \infty$ richtig bestimmen will, man hier desto weniger befugt sey, den Bruch $\frac{1}{\infty}$ wegzulassen, je kleiner er ist, mithin

am allerwenigsten, wofern er schon genau $= 0$ und daher der kleinstmögliche ist. Setzt man nun aber in der obigen Gleichung

$$b = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{n-1}{2n} + \frac{(n-1).(n-2)}{6n^2} + \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{24n^3} + \ldots n = \infty;$$

so ist

$$b = 2 + \frac{\infty - 1}{2\infty} + \frac{(\infty-1)\cdot(\infty-2)}{6\infty^2} + \frac{(\infty-1)\cdot(\infty-2)\cdot(\infty-3)}{24\infty^3} + \ldots$$

Da nun $\infty - 1 = \infty - 2 = \infty - 3 = \infty$ ist (§. 40.); so ist

$$b = 2 + \frac{\infty}{2\infty} + \frac{\infty^2}{6\infty^2} + \frac{\infty^3}{24\infty^3} + \ldots\ldots$$

Also $b = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots\ldots$

Und hier zeigt sich noch deutlicher, warum man nicht schlechthin 1 statt $1 + \frac{1}{\infty}$ setzen kann, wenn man $1 + \frac{1}{\infty}$ zur ∞ ten Potenz erheben will, obgleich genau $\frac{1}{\infty} = 0$ ist. Denn $\frac{1}{\infty}$ bedeutet eigent=

eigentlich den ∞ ten Theil von 1. Nun mag man diesen durch jede endliche Zahl r multipliciren, so ist, wenn $\frac{1}{\infty} = 0$ ist, auch $\frac{r}{\infty} = 0$. Nimmt man dagegen den ∞ ten Theil von 1 ∞ mal, so hat man die ganze 1, und es ist also $\frac{1}{\infty} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty} = 1$, $\frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{\infty} \cdot \infty^2 = 1$ u. s. w. Kommen daher in algebraischen Rechnungen Multiplicationen von $\frac{1}{\infty}$ durch bloße endliche Zahlen vor; so kann man allenthalben 0 statt $\frac{1}{\infty}$ setzen, und daher $\frac{1}{\infty}$ gänzlich weglassen. So ist zum Beispiel $\left(1 + \frac{1}{r}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{r} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot r^2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot r^3} + \ldots$ Nun setze man $r = \infty$; so ist $\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^n = 1 + \frac{n}{\infty} + \frac{n \cdot (n-1)}{2\infty^2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6\infty^3} + \ldots = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 1 = 1^n$. Kommen dagegen in der Rechnung Multiplicationen von

von $\frac{1}{\infty}$ durch ∞, ∞^2 u. s. w. vor, wie dieses gerade der Fall bei $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty$ ist; so kann man, wenn gleich $1+\frac{1}{\infty}$ genau $=1$ ist, dennoch nicht sagen, daß $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty = 1^\infty$ sey. Denn, wenn man $1+\frac{1}{\infty}$, d. i. die 1 mit ihrem unendlichsten Theil zusammen, zur ∞ten Potenz erheben will; so kommen hier wirklich Multiplicationen von $\frac{1}{\infty}$ durch ∞ vor, und man setzt also aus dem unendlichsten Theile von 1 wirkliche Einer zusammen, und so erwachsen daraus endliche Zahlen, die noch zu 1^∞ hinzu kommen. Inzwischen kann man in der That statt $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty$ auch $(1+0)^\infty$ setzen, wenn man nur den Begriffen treu bleibt, und nicht vergißt, daß bei der Behauptung, es sey $\frac{1}{\infty}=0$, auch $0.\infty=1$, und daher auch $0^n \infty^n = 1$ sey. Denn da

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

+

$$+\frac{n.(n-1).(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots$$ ist; so ist

für $n=\infty$, und $\frac{1}{n}=0$

$$(1+0)^\infty=1+0.\infty+\frac{0^2.\infty^2}{2}$$

$$+\frac{0^3.\infty^3}{6}+\ldots.=1+1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\ldots.$$

Es ist also klar, daß, wenn gleich $\frac{1}{\infty}=0$ ist, hieraus noch gar nicht folgt, daß deshalb $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty=1^\infty$ sey. Vielmehr ist eben dieser Einwurf selbst eine deutliche Bestätigung, daß $\frac{1}{\infty}$ in der That genau $=0$ ist. Denn, wäre dieses nicht wahr, so wäre auch nicht $1-\frac{1}{\infty}=1$, $2-\frac{1}{\infty}=2$, u. s. w. also auch nicht $\infty-1=\infty$, $\infty-2=\infty$, da doch $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty$ nur unter dieser Bedingung vollkommen genau $=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots$ ist, wie kurz vorher gezeigt worden.

Endlich heißt es noch in der eben angeführten Recension: „es scheine nicht, daß man in dem Aus-

Ausdruck $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$, dx genau = o setzen könne, weil sonst diese Formel in Worten ausgedruckt wol nichts anders heißen könnte, als: wenn die Wurzel eines Quadrats um nichts wächst, so verhält sich das Wachsthum der Wurzel zum Wachsthum des Quadrats, wie Eins zur doppelten Wurzel.„ Allein, wenn man hier $x^2 = u$ setzt; so ist die Frage bloß die, ob $\frac{du}{dx} = 2x$ seyn könne, wenn dx, du genau = o sind, d. i. ob $\frac{o}{o} = 2x$ seyn könne? Daß dieses aber allerdings so seyn könne, obgleich eine Null so groß ist, als die andere, habe ich bereits in der oben angeführten Disputation: de Geometria acustica, ausführlich erwiesen. Und da in der Gleichung für den Kreis $a - x : y = y : x$, wenn sowol x, als y = o werden, $a : o = o : o$, also $\frac{o}{o} = \frac{a}{o} = \infty$ wird; so ist eben daselbst erwiesen, daß auch dieses richtig ist, ohne daß eine Null größer seyn dürfe, als die andere. So fallen denn die Einwürfe wider die Allgemeinheit des Satzes $\frac{1}{\infty} = o$ insgesamt hinweg, und in der That ist es schlechterdings unmöglich, daß irgend ein gegründeter Einwurf wider dieselbe stattfinden könnte, weil sonst auch der Satz $\frac{1}{o} = \infty$ nicht allgemein seyn müßte, dessen Allgemeinheit doch niemand

mand leugnen kann, theils weil derselbe überall, wo er in der Analysis vorkommt, (welches ungemein oft geschieht,) von jedem für was Unendliches erkannt werden muß, theils weil sonst die Zuverlässigkeit der ganzen allgemeinen Rechenkunst aufgehoben würde. Denn, da er aus den ordentlichen Regeln derselben richtig folgt, so müßte man immer in Zweifel seyn, ob diese Regeln auch in der That allgemeine Brauchbarkeit hätten.

§. 43.

Aus dem Beweise des Satzes, daß $\frac{1}{0} = \infty$ ist, folgt zugleich (§. 40.) unmittelbar, daß, a mag eine noch so große endliche Zahl bedeuten, allemal $\infty \pm a = \infty$ in dem Sinne sey, daß der Ausdruck ∞ auf beiden Seiten ganz ein und eben dieselbe unendliche Menge $\frac{1}{0}$ bedeutet, und aus §. 42. erhellte auch, daß der ganz richtige Satz:

$$\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{\infty} = 2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} + \ldots.$$

nur dann wahr ist, wenn $\infty - n = \infty$ ist. Gleichwol habe ich auch in Ansehung des Satzes $\infty \pm a = \infty$ an Herrn Hofrath Karsten einen außerordentlich heftigen Gegner. Ob er gleich sowol den Satz: $\frac{1}{0} = \infty$, als $\frac{1}{\infty} = 0$, eben so wie ich, als allgemein richtig mit vielem Eifer be-

hau-

hauptet; so sagt er dennoch in seinen math. Abh. I. §. 34: „es wäre schlechterdings falsch, wenn „man schlechthin $\infty + a = \infty$ setzen wollte. „In solchen Fällen, wenn man auf eine Gleichung „von dieser Form kommt, darf man nicht auch „$\infty = \infty$ annehmen, und nun diese Gleichung „von jener subtrahiren, da dann die Schlußfolge „$a = 0$ kommen würde. Eben so wenig kann „man aus der Gleichung $\infty + a = \infty$ unmittel„bar die Folge $a = \infty - \infty = 0$ ziehen. Die „Regel will nichts weiter sagen, als daß $\frac{a}{\infty} = 0$ „sey, weil $\frac{a}{\infty}$ nichts anders ist, als $a . \frac{1}{\infty}$ „$= a . 0$.„ Nun muß es zwar sogleich einem jeden auffallen, wie Hr. Karsten behaupten könne, daß man in der Analysis auf eine Gleichung wie $\infty + a = \infty$ kommen könne, wofern dieselbe schlechterdings falsch ist. Denn, steht es mit den Regeln der Analysis so, daß sie auf grundfalsche Gleichungen führen, dann, erhabene Analysis, gehab dich wohl! Und dieses Grablied würde sie alsdenn noch um so mehr verdienen, da, wie §. 40. gezeigt worden, aus eben den Regeln der Division, nach welchen schlechthin $\frac{1}{0} = \infty$ ist, zugleich folgt, daß auch schlechthin $\frac{1}{0} + a = \frac{1}{0}$, und $\infty + a = \infty$ ist. Denn, ist der letztere Quotient falsch, was kann uns denn versichern, daß der erstere wahr sey? Kann man ferner nicht sa-

gen, daß $\infty - \infty = a$ ist, so kann auch nicht $(1 - 1)\infty = a$ seyn; mit welchem Rechte will man denn nun behaupten, daß $\infty = \frac{a}{0}$ sey? Hr. Karsten meynt endlich, wenn eine Gleichung wie $\infty + a = \infty$ vorkommt, so heiße dieses nicht, daß die Größe von ∞, wenn man a zu ihr addirt, eben dieselbe bleibe, sondern nur: daß in diesem Falle $\frac{a}{\infty} = a \cdot 0 = 0$ sey. Z. B. wenn $y = \frac{bx + a}{fx}$ vorkommt; so wisse man, daß $y = \frac{b + a:x}{f}$ sey; wolle man nun wissen, was y für $x = \infty$ werde, so erhalte man $y = \frac{b + 0}{f} = \frac{b}{f}$. Eben so werde aus $\frac{x + a}{x}$ für $x = \infty$ $\frac{\infty + a}{\infty} = 1 + \frac{a}{\infty} = 1$, hiemit aber höre alle Rechnung auf, und man müsse nicht weiter schließen: also $\infty + a = \infty$, und $a = \infty - \infty = 0$. Allein, da der zweite Satz $\infty + a = \infty$ aus dem erstern, vermöge des Grundsatzes: Gleiches durch Gleiches multiplicirt giebt Gleiches, eben so richtig folgt, als der erstere aus dem letztern vermöge des Grundsatzes: Gleiches durch Gleiches dividirt giebt Gleiches, fließt; so wird der Analyst, wofern seine Größe

 nicht

nicht etwa im blinden Glauben besteht, doch fragen dürfen, woher denn in der Lehre des Unendlichen zwar der zweite, aber nicht der erste Grundsatz gültig seyn soll? Denn wenn man z. B. die Formel $\frac{x^2+a}{x}$ nimmt, und $x=\infty$ setzt, so wird $\frac{\infty^2+a}{\infty}=\infty+\frac{a}{\infty}$. Ist es nun ketzerisch, auf beiden Seiten durch $\infty=\infty$ zu multipliciren; so muß es ja auch ketzerisch seyn, daß $\infty^2+a=\infty^2+a$, d. i. daß jede Größe sich selbst gleich sey. Und diese Folge ist überhaupt natürlich und unvermeidlich, denn die Grundsätze: Gleiches mit Gleichem multiplicirt oder dividirt giebt Gleiches, sind ja beide völlig identische Sätze, deren allgemeine Gültigkeit also eben so wenig durch die besondere Beschaffenheit irgend einer Größe eingeschränkt werden kann, als die Allgemeinheit des Satzes des Widerspruchs. Wäre daher der eine von jenen Grundsätzen beim Unendlichen unrichtig; so wäre es auch der andere, mithin wären die Regeln der Arithmetik auf das Unendliche gar nicht anwendbar, und der Satz: aus $\frac{x+a}{x}$ für $x=\infty$ wird $1+\frac{a}{\infty}=1$, wäre alsdenn eben so falsch, als die Schlußfolge aus diesem, daß $\infty+a=\infty$ sey. Also könnte sich zwar $\frac{x+a}{x}$ der Grenze 1 immer mehr nähern,

je größer man x annähme; aber zu sagen, daß man diese Grenze 1 fände, wenn man $x = \infty$ setzt, wie doch Hr. Karsten selber behauptet, wäre offenbar unrichtig, indem man eben so wenig sagen könnte, daß $\frac{\infty}{\infty} = 1$, als daß $\infty = \infty$ d. i. $x = x$ sey. Soll endlich der Satz $\infty + a = \infty$ durchaus falsch seyn, so muß auch das, was richtig aus ihm folgt, falsch seyn. Nun ist, wenn $\infty + a = \infty$ ist, auch $\infty + a = \infty + 0$. Da nun ferner, nach Hr. Karsten, der Grundsatz: Gleiches mit Gleichem dividirt giebt Gleiches, auch beim Unendlichen gültig ist; so folgt $1 + \frac{a}{\infty} = 1 + \frac{0}{\infty}$. Da nun $\frac{a}{\infty} = \frac{0}{\infty} = 0$ ist, so ist $1 = 1$. Ist also der Satz $\infty + a = \infty$ falsch, so ist auch der aus ihm richtig gefolgerte Satz $1 = 1$ falsch *).

*) Hr. Gensichen, der sich bereits durch seinen Versuch über die Parallellinien rühmlich bekannt gemacht, und von dessen mathematischen Talenten ich nichts weiter sagen darf, als daß er ohne jemandes Beihülfe durchs bloße Studium der unschätzbaren Kästnerschen Anfangsgründe in kurzer Zeit sich sehr gründliche Kenntnisse nicht nur in der gemeinen, sondern auch selbst in der höhern Mathematik erworben, erwähnte mir vor einigen Tagen, wie er auf eine sehr leichte Methode gekommen, den Satz $\infty + 1 = \infty$ analytisch zu beweisen,

§. 44.

Wenn man erwägt, daß Hr. Karsten so gar den identischen Satz $\infty = \infty$ für falsch ausgiebt (§. 18. n. 3.); so darf man sich freilich nicht wundern, wenn er sich wider den Satz $\infty + a = \infty$, ungeachtet der strengsten Beweise, die seine Richtigkeit außer Zweifel setzen, erklärt. Indessen muß dieses natürlicher Weise um so mehr die Frage erregen, warum er denn eigentlich beide offenbar richtige Sätze so sehr bestreite. Der Grund hie-

weisen, und die es verdient, daß ich sie mit seiner Bewilligung hier anführe. Man setze die Gleichung $x = x + 1$. Da nun in einer einfachen Gleichung, die nur eine unbekannte Größe enthält, letztere nur einen bestimmten Werth hat; so muß sich derselbe auch finden lassen, und wenn daher die Gleichung, wie es den Schein hat, in der That widersprechend ist; so wird der gesuchte Werth für x eine unmögliche Größe seyn müssen. Allein wenn $x = x + 1$ ist; so ist $x - x = 1$, folglich $(1 - 1)x = 1$, also $x = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$. Also zeigt die Auflösung, daß die Gleichung allemal richtig ist, wenn $x = \infty$ ist. Nimmt man die Gleichung $x = x + \infty^n$, die noch widersprechender zu seyn scheint; so ist

$$(1 - 1)x = \infty^n,\ \text{folglich}\ x = \frac{\infty^n}{0}$$

$= \infty^n . \frac{1}{0} = \infty^n . \infty = \infty^{n+1}$. Also ist $\infty^{n+1} + \infty^n = \infty^{n+1}$.

hievon ist, weil aus $\infty + a = \infty$ unmittelbar folgt, daß theils $a = 0$, theils der Theil ∞ dem Ganzen $\infty + a$ gleich sey, beide Sätze aber ihm so unerhört vorkommen, als ob dadurch die Gewißheit der ganzen Mathematik zu Grunde gehen würde. Was den ersten Satz betrifft, so sagt er schon in der zuletzt angeführten Stelle: aus $1 + \frac{a}{\infty} = 1$ müsse man nicht schließen: also $\infty + a = \infty$, und $a = \infty - \infty = 0$. Dieses ist ihm so was offenbares, daß er keinen Beweis davon giebt, sondern sich bloß auf Autoritäten beruft. „Alle Schriftsteller von Gewicht und An„sehen,„ sagt er, „erinnern ausdrücklich, daß „das Endliche in Vergleichung mit dem Unend„lichen nicht verschwinde, wenn von der arith„metischen Vergleichung, sondern nur, wenn von „der geometrischen Vergleichung die Rede sey.„ Um dieses zu zeigen, bezieht er sich auf eine Stelle des großen Euler, der freilich instar omnium ist, in seinen Inst. Calc. Diff. Cap. III. §. 96., die ich zur bessern Uebersicht ganz hersetzen will: Quemadmodum in quantitatibus infinite parvis dantur rationes geometricae inaequales, cum tamen rationes arithmeticae omnes sint aequales: ita in quantitatibus infinite magnis dantur rationes geometricae aequales, cum tamen arithmeticae sint quantumvis inaequales. Si enim *a* et *b* denotent quantitates finitas, hae duae quan-

titates infinitae $\frac{a}{dx} + b$ et $\frac{a}{dx}$ rationem geometricam habent aequalitatis; erit enim quotus ex earum divisione ortus $= 1 + \frac{bdx}{a} = 1$ ob $dx = 0$; interim tamen, si arithmetice comparentur, ob differentiam $= b$, ratio erit inaequalitatis. Simili modo $\frac{a}{dx^2} + \frac{a}{dx}$ ad $\frac{a}{dx^2}$ rationem geometricam habet aequalitatis, exponens enim rationis est $= 1 + dx = 1$, verum tamen differentia est $\frac{a}{dx}$ ideoque infinita. Hinc si ad rationem geometricam spectemus, infinite magna inferiorum graduum prae infinite magnis superiorum graduum evanescunt. Hiebei macht nun Hr. Karsten, Abh. II. §. 69. p. 191., die Anmerkung: „Also soll man aus der Gleichung $\frac{a}{dx} + b = \frac{a}{dx}$ nicht die Folge ziehen „$b = 0$. Noch vielweniger soll man also aus „der Gleichung $\frac{a}{dx^2} + \frac{a}{dx} = \frac{a}{dx^2}$ die Folge „$\frac{a}{dx} = 0$ ziehen.„ Allein, wenn man statt bündiger Beweisgründe sich bloß auf die Be-

hau-

hauptungen großer Männer beruft, so ist es nöthig, daß man zuerst den wahren Sinn und dann den Grund ihrer Behauptungen untersucht. Hier finde ich nun, daß Euler in der angeführten Stelle bloß folgende zwey Sätze erwiesen: wenn $dx = 0$ und a, b endliche Größen sind; so ist

$$\left(\frac{a}{dx} + b\right) : \frac{a}{dx} = 1,$$

und

$$\left(\frac{a}{dx} + b\right) - \frac{a}{dx} = b,$$

d. i. die unendlichen Größen $\frac{a}{dx} + b$ und $\frac{a}{dx}$ sind im geometrischen Verhältnisse der Gleichheit, obgleich sie in ihrem arithmetischen Verhältnisse die endliche Größe b zur Differenz haben. Diese Sätze sind nun beide so wahr, daß es die größeste Ungereimtheit seyn würde, wenn man den einen oder den andern auch nur bezweifeln wollte. Und eben so ungereimt wäre es auch, wenn man die Differenz b, die man selbst für eine endliche Größe angenommen, für ein wirkliches absolutes Nichts halten wollte. Von diesen drey Punkten ist hier also auch gar nicht die Rede, sondern die Frage ist vielmehr diese: da in beiden Fällen 1 herauskommt, man mag bloß $\frac{a}{dx}$, oder $\frac{a}{dx} + b$ durch $\frac{a}{dx}$ dividiren, was hat also die endliche

Größe b zur unendlichen $\frac{a}{dx}$ für ein Verhältniß? Wird letztere größer, wenn man b zu ihr addirt, oder bleibt sie eben so groß, als sie vorhin war? d. i. ist $\frac{a}{dx} + b > \frac{a}{dx}$, oder ist $\frac{a}{dx} + b = \frac{a}{dx}$? Nun scheint sich zwar Euler für das erstere zu erklären, denn er schließt: weil die Differenz zwischen den Größen $\frac{a}{dx}$ und $\frac{a}{dx} + b$ nicht $= 0$, sondern $= b$ ist; so stehen sie im arithmetischen Verhältnisse der Ungleichheit. Allein, dieses ist zu viel geschlossen. Denn nach dem Begriffe eines arithmetischen Verhältnisses folgt daraus nichts weiter, als: $\frac{a}{dx} + b$ ist um *b* größer, als $\frac{a}{dx}$. Da sich aber hier der besondere Fall eräugnet, daß b das geometrische Verhältniß gedachter Größen nicht vergrößert, und überdem b nur der unendlichvielte Theil von $\frac{a}{dx}$ ist (§. 14.); so entsteht natürlich die Frage, ob nicht das Verhältniß, welches b zu $\frac{a}{dx}$ hat, von der Art sey, daß auch $\frac{a}{dx}$ selbst, durch b eben so wenig, als

die

die endliche Größe *a* durch ihren unendlich vielten Theil $\frac{a}{\infty}$, vergrößert wird, sondern b im arithmetischen Verhältnisse eben so, als im geometrischen gegen $\frac{a}{dx}$ verschwindet, und ob also nicht der Satz: $\frac{a}{dx} + b$ ist um b größer als $\frac{a}{dx}$, eben so viel heißt, als: jenes Unendliche ist um Nichts größer, als dieses. Diesen Punkt hätte also der große Euler erst näher untersuchen müssen, wofern sein Urtheil in dieser Sache Zuverlässigkeit haben sollte; und wie sehr bedaure ich es, daß er diese Untersuchung nicht wirklich angestellet hat, da ich überzeugt bin, daß er in diesem Falle zwischen mehrerwähnten Größen das arithmetische Verhältniß der Gleichheit eben so deutlich, als das geometrische wahrgenommen hätte. Denn Euler setzt nirgends, wie Hr. Karsten, dem Calcul willkührliche Grenzen. Die Resultate des allgemeinen Calculs mögen bei dem Unendlichen zuweilen noch so ungereimt scheinen, so sagt er nicht: hier hört also alle weitere Rechnung auf, sondern er vertheidigt die Richtigkeit solcher Resultate aufs eifrigste, und sucht die scheinbare Ungereimtheit derselben vielmehr gründlich zu heben, und zwar immer aus dem ächt mathematischen und unumstößlichen Grunde, weil die festen Grundpfeiler der ganzen Analysis umgerissen würden, wofern

man auch nur in einem einzigen Falle sagen wollte, hier fänden die ordentlichen allgemeinen Rechnungsregeln nicht mehr statt, sondern führten wirklich auf falsche Sätze. (Inst. Calc. Diff. Cap. III. §. 91. 105. et alibi.) Nun ist, nach seinem erstern Satze, $\left(\frac{a}{dx} + b\right) : \frac{a}{dx} = 1 + \frac{bdx}{a}$ $= 1 + 0 = 1$, und wenn man den Quotienten $1 + \frac{bdx}{a}$ durch den Divisor $\frac{a}{dx}$ multiplicirt, so bekommt man $\frac{a}{dx} + b$. Also ist $\frac{a}{dx} + b$ $= \left(1 + \frac{bdx}{a}\right)\frac{a}{dx} = (1+0)\frac{a}{dx} = \frac{a}{dx}$. Und so hätte Euler nach seinen eigenen Grundsätzen gestehen müssen, daß diese beiden Größen auch im arithmetischen Verhältnisse der Gleichheit stehen, daß also b die unendliche Größe nicht vergrößere, und daß mithin der Satz: die erstere sey um *b* größer, als die andere, hier eben so viel sagt, als: jene ist um Nichts größer als diese.

§. 45.

Gesetzt indessen, Euler hätte demungeachtet diesen Satz noch für bedenklich gehalten; so kann doch da, wo klare und unumstößliche Beweise vorhanden sind, auch die Meinung der größesten Män-

Männer in keine Betrachtung kommen *). Und hier sind solche Beweise da, indem nicht nur der

eben

*) Ich kann mich noch gar nicht einmal überreden, daß Euler durch das arithmetische Verhältniß der Ungleichheit mehr habe sagen wollen, als daß die Differenz desselben keine absolute Null sey, weil er sonst gewiß nicht unterlassen haben würde, sich darüber näher zu erklären. Dem sey aber, wie ihm wolle; so muß ich bei dieser Gelegenheit überhaupt gestehen, wie es mir äußerst befremdend ist, daß in einer Wissenschaft, wo alles aufs strengste bewiesen werden muß, Autoritäten entscheiden sollen. So tief auch meine Ehrerbietung gegen die Einsichten großer Männer ist, so habe ich doch in meiner Einfalt immer geglaubt, daß, wenn je in einer Wissenschaft, so vorzüglich in der Mathematik, nie das Gewicht und Ansehen der Männer, sondern lediglich das Gewicht und Ansehen ihrer Beweisgründe zum Entscheidungsgrunde dienen könne. Allein aus der Art, wie Hr. Karsten in seinen math. Abh. verfährt, sollte ich fast schließen, daß ich mich hierinnen gänzlich geirrt habe. Wenn das der Geist der Mathematik ist, bei allen Behauptungen zu sagen: gründlich und richtig denkende Mathematiker denken so — alle Schriftsteller von Gewicht und Ansehen sagen dieses — Euler und andere berühmte Männer, die doch wol wissen müssen, was Rechnung des Unendlichen sey, lehren ausdrücklich so und nicht anders — wenn wir uns erlauben wollen, mit Euklids Elementen so umzugehen, wie ich es hier finde, so wird dieses Buch künftig kein besseres Schicksal als die Bibel erfahren u. s. w.; so muß nothwendig jeder Freund der Mathematik, der sich des Verbrechens schuldig

gemacht,

eben angeführte von der Art ist, sondern auch, wie bereits im Vorhergehenden gezeigt worden,

aus

gemacht, nicht nachzubeten, sondern zu denken, beschämt zurückbeben, auf gründliche Einsicht und Ueberzeugung völlig Verzicht thun, ohne alle Prüfung und weiters Fortstreben nur unbedingt glauben, was Euklides und andere große Männer gelehrt, und ihre Aussprüche noch für unfehlbarer, als die göttliche Offenbarung halten. Aber das allersonderbarste ist, wenn es ihm bei diesem unbedingten Glauben zur Pflicht gemacht wird, jenen großen Männern doch nicht in allen Punkten beizupflichten. Wenn z. B. Euler sagt: das Unendlichgroße ist nicht nur eins, unendliche Größen lassen sich eben so wie die endlichen vergleichen, und können in jedem Verhältnisse der Ungleichheit stehen, alles, was aus den ordentlichen Regeln des allgemeinen Calculs folgt, ist richtig, und man kann nicht sagen: hier hört die Rechnung auf, ohne den ganzen Grund der Analysis umzustürzen — dann ist er kein Mann von Gewicht, dann denkt er nicht gründlich und richtig, dann weiß er nicht, was Rechnung des Unendlichen ist. Aber wenn er gleichsam nur im Vorbeigehen sagt: die Größen $\frac{a}{dx} + b$ und $\frac{a}{dx}$ stehen im arithmetischen Verhältnisse der Ungleichheit, ohne sich einmal über den Sinn dieses Satzes näher zu erklären, oder irgend einen Beweis davon zu geben, dann ist er der große unfehlbare Mann, von dessen Ausspruche abzugehen, völlige Untergrabung der ganzen Mathematik und des gesunden Menschenverstandes, und die unverzeihlichste Verdrehung des Euklids

seyn

aus eben denselben Regeln der Division, aus welchen Euler selbst herleitet, daß $\frac{a}{dx} = \infty$ ist, zugleich unmittelbar folgt, daß $\frac{a}{dx} + b = \frac{a}{dx}$ ist. Ist aber dieses gewiß, so ist offenbar das Verhältniß, welches b zu $\frac{a}{dx}$ hat, von der Art, daß $\frac{a}{dx}$ gar nicht vergrößert wird, wenn man b zu ihr addirt. Und dieses ist auch an sich klar. Denn da $b : \frac{a}{dx} = bdx : a = b \cdot o : a = o$ ist; so hat jede endliche Größe b zur unendlichen $\frac{a}{dx}$ eben dasselbe Verhältniß, welches o zu einer endlichen Größe a, ein Punkt zu einer Linie, eine Linie zu einer Fläche, und eine Fläche zum Körper hat, d. i. b hat zu $\frac{a}{dx}$ gar kein Verhältniß. Wenn

daher

seyn würde, obgleich dieser die Lehre vom Unendlichen ganz in Ruhe gelassen. Gewiß! eine treffliche Empfehlung der Mathematik für diejenigen, welche diese erhabene Wissenschaft gerade darum so sehr reizt, weil sie in derselben nur Einsicht durch überzeugende Beweise erwarten, ohne durch Autorität oder irgend ein Interesse genöthigt zu seyn, ihrer freyen Nachforschung Fesseln anzulegen!

daher b zu $\frac{a}{dx}$ hinzu kommt, so wächst die Größe $\frac{a}{dx}$ um so was, das zu ihr gar kein Verhältniß hat, d. i. um Nichts, so groß auch b an sich seyn mag. Denn gerade daraus, daß $b : \frac{a}{dx} = bdx : a$ ist, fließt unmittelbar die Folge, daß $\frac{a}{dx} + b : b = a + bdx : bdx = a : bdx$, also $\frac{a}{dx} + b = \frac{a}{dx}$ ist. Es also bedenklich finden, daß eine unendliche Größe durch eine endliche nicht vergrößert werde, heißt eben so viel, als es bedenklich finden, daß nicht a durch o, die Fläche durch eine Linie, und der Körper durch eine Fläche vergrößert werden solle. Ist es nun aber unwidersprechlich gewiß, daß $\frac{a}{dx} + b = \frac{a}{dx} = \frac{a}{dx} + o$ ist; so folgt hieraus auch, daß $b = o$ ist, d. i. daß es für den Werth der Größe $\frac{a}{dx}$ einerley ist, ob man b oder o zu ihr addirt, und daß also das Endliche gegen das Unendliche nicht nur im geometrischen, sondern auch im arithmetischen Verhältnisse völlig verschwinde, das

heißt,

heißt, daß das Endliche gegen das Unendliche in jeder Vergleichung völlig Nichts, mithin zwar kein absolutes, wie $\frac{dx}{a}$, aber doch ein relatives Nichts sey. Und da b der unendlichvielte Theil von $\frac{a}{dx}$ ist; so ist aus dem Satze $\frac{a}{dx} + b = \frac{a}{dx}$ zugleich klar, daß bei dem Unendlichen das Ganze $\frac{a}{dx} + b$ allemal dem Theil $\frac{a}{dx}$ gleich ist, wenn sein Nebentheil b endlich, mithin nur der unendlichvielte Theil von ihm ist. So allgemein also auch der Grundsatz: das Ganze ist größer als sein Theil in Ansehung aller endlichen Größen, von denen Euklides allein handelt, richtig ist; so leidet er dagegen beim Unendlichen offenbar eine Einschränkung, indem hier das Ganze auch dem Theil gleich seyn kann, wenn nemlich sein Nebentheil nur der unendlichvielte von ihm ist, und alle Einwendungen, die man dawider machen mag, sind also erwiesen nichtig. Daß aber das Ganze niemals kleiner seyn könne, als sein Theil, wenn NB. von lauter Größen von einerley Bedingung, nemlich entweder von lauter positiven, oder von lauter negativen Größen die Rede ist; dieses ist ein Grundsatz, der beim Unendlichen eben so wie beim Endlichen ganz allgemein richtig ist, weil der ganze Begriff von Vermehrung wegfiele, wofern irgend eine Größe durch Hinzusetzung einer

andern

andern von eben derselben Bedingung kleiner werden könnte. Es ist also höchst sonderbar, wenn nicht nur Hr. Karsten, sondern auch andere es als einen Einwurf wider mich ansehen, daß ein Ganzes, das aus entgegengesetzten Größen besteht, oder eine algebraische Summe von positiven und negativen Größen auch kleiner seyn könne, als sein Theil, z. B. 8 Meilen östlich + 5 Meilen westlich = 3 Meilen östlich, da ich doch, wie meine ganze Theorie der Parallelen zeigt, auf keine Weise in den angezeigten Sätzen von entgegengesetzten Größen, sondern lediglich von Größen rede, die alle von einerley Bedingung sind, ohne einmal daran zu denken, daß es höchst uneigentlich und wider den wahren Begriff des Ganzen ist, eine Summe entgegengesetzter Größen ein Ganzes zu nennen, wie ich in der Darstellung der vollkommenen Evidenz und Schärfe meiner Theorie der Parallelen 1786. S. 52. 53. deutlich gezeigt habe. Will man indessen eine solche Summe durchaus ein Ganzes nennen, so kann ich diesen beliebigen Namen eben so gleichgültig ansehen, als die in diesem Falle daraus hergeleitete Folge: ein Ganzes, das aus entgegengesetzten Größen besteht, könne kleiner seyn, als sein Theil; d. i. mit andern Worten: eine algebraische Summe entgegengesetzter Größen könne kleiner seyn, als einer von den Summanden. Denn meine vorhin erwiesene Sätze, in welchen bloß von einem solchen Ganzen, das aus lauter

Größen

Größen von einerley Bedingung besteht, die Rede ist, geht dieser Wortstreit gar nichts an.

§. 46.

So ist dann auch das Nichtige der vermeinten Hauptschwierigkeit, welche außer Hr. Karsten auch andre für so bedeutend angesehen, von allen Seiten einleuchtend, und ich muß bekennen, daß es mir beinahe ein Räthsel ist, wie man das schwierig finden könne, daß eine Größe, die zu einer andern gar kein Verhältniß hat, diese auch nicht vergrößern könne. Nunmehr wird es noch nöthig seyn, zu untersuchen, was für einen Begriff man eigentlich mit dem Ausdrucke $\frac{1}{0}$ zu verknüpfen hat, und zugleich die scheinbaren Schwierigkeiten zu heben, die sich auch hier äußern, und den Anfänger der Analysis nicht wenig zu verwirren pflegen. Die Erklärungen, welche die Mathematiker von der Division geben, sind verschieden. Nach einigen heißt a durch n dividiren so viel, als finden, wie vielmal sich n von a abziehen läßt, so daß nichts übrig bleibt; d. i. finden, wievielmal der Divisor im Dividendus enthalten ist. Nach andern heißt a durch n dividiren so viel, als die Größe finden, die man bekommt, wenn man a in n gleiche Theile theilt, d. i. die Größe finden, die durch den Divisor multiplicirt den Dividendus giebt. Allein man mag die eine oder die andere Erklärung nehmen, so ist klar, daß die Division durch o im eigent-

lichen Sinne auf keine von beiden paßt. Denn fragen: wievielmal muß 0 von 1 subtrahirt werden, daß nichts übrig bleibt, oder welches ist die Zahl, die 0mal genommen 1 giebt, sind beides Fragen, die keinen Sinn haben. Also stimmt der Ausdruck $\frac{1}{0}$, wenn man unter 0 nichts weiter als Nichts denkt, mit dem eigentlichen Begriffe der Division eben so wenig, als der Ausdruck $a^{\frac{1}{2}}$ oder a^{-3} mit dem eigentlichen Begriffe der Potenz. Wie indessen die letzten Ausdrücke keine Chimären und Undinge, wie $\sqrt{-1}$, sondern erweiterte Begriffe der Potenzen sind, die aus den allgemeinen Regeln der letztern natürlich folgen, und daher nicht nur, wie selbst $\sqrt{-1}$, in der allgemeinen Rechenkunst unentbehrlich sind, sondern auch wahre reale Zahlen bedeuten: so verhält es sich auch mit dem Ausdruck $\frac{1}{0}$. Denn nach den Regeln der Division ist, wenn man 1 durch den Bruch $\frac{1}{n}$ dividirt, der Quotient allemal $= n$, und je größer also die ganze Zahl n, oder die Menge von Einern wird, desto größer wird der Quotient. Setzt man daher die Menge der Einer unendlich groß, das ist $n = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \sim = \infty$; so wird $1 : \frac{1}{\infty} = \infty$. Nun ist $\frac{1}{\infty}$ kleiner als jeder endliche Bruch, folglich kleiner als jede Zahl. Allein, was kleiner ist, als jede Zahl,

das

das ist offenbar Null, folglich ist $\frac{1}{\infty} = 0$, und dieses ist auch schon daraus klar, weil der unendlichvielte Theil von 1, als Theil betrachtet, ein Unding, folglich kein Theil von 1, also 0 ist. Also kann man die Null als den unendlichvielten Theil von 1 ansehen, und sie daher durch den Bruch $\frac{1}{\infty}$ ausdrucken, und durch diesen Kunstgriff wird sie fähig, daß man mit ihr in der ganzen Analysis eben so zuverlässig rechnen kann, als mit wirklichen Zahlen, wofern man nur dem Kunstbegriffe, den man mit ihr verbindet, genau treu bleibt. Jetzt wende man nemlich die eine oder die andere Erklärung der Division auf den Ausdruck $\frac{1}{0}$ d. i. $1 : \frac{1}{\infty}$ an; so ist dieser beiden Erklärungen völlig angemessen, und hat also einen wahren Sinn. Denn $\infty \cdot \frac{1}{\infty}$ d. i. der unendlichvielte Theil von 1 unendlich viele male genommen, giebt die ganze 1. Stellt man sich nun $\frac{1}{\infty}$, ∞mal von 1 subtrahirt vor, so stellt man sich 1 von 1 subtrahirt vor, folglich bleibt nichts übrig, und es ist also ∞ der wahre Quotient. Multiplicirt man ferner den Quotienten

ten ∞ durch den Divisor $\frac{1}{\infty}$, so hat man genau den Dividendus 1, und ∞ ist also wieder der wahre Quotient. Also ist hieraus klar, daß 1 durch 0 dividiren an sich keinen Sinn hat, sondern bloße Kunstsprache ist, vermöge welcher man die 0 als den unendlichvielten Theil von 1 ansieht, und eben dadurch berechtigt ist, sie als einen wirklichen Bruch $\frac{1}{\infty}$ zu behandeln. Hiedurch löst sich zugleich der scheinbare Widerspruch, $1 = 0 \cdot \infty$, der aus $\frac{1}{0} = \infty$ folgt, von selber auf, denn da aus $\frac{1}{0} = \infty$ auch folgt, daß $\frac{1}{\infty} = 0$ ist, so ist allerdings $0 \cdot \infty = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = 1$. Indessen äußert sich hier noch ein anderer Widerspruch, der die algebraische Division $\frac{1}{1 - 1} = 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$ betrifft. Wenn man hier den Quotienten durch den Divisor $1 - 1$ multiplicirt, so scheint das Product nicht 1, sondern in der That 0, nemlich $1 + 1 + 1 + \ldots - (1 + 1 + 1 + \ldots\ldots)$ zu geben. Allein, da $\frac{1}{1 - 1}$ nur ein Specialfall von $\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots$ ist, wenn man $x = 1$ setzt; so muß derselbe nach diesem allgemeinern Fall beurtheilt werden, und daher die Multiplication

von

von 1 + 1 + 1 + ... durch 1 — 1 nach eben der Form geschehen, wie die Multiplication von $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ durch $1 - x$ (§. 39.), nemlich 1 + 1 + 1 + 1 + ...

$$\begin{array}{l} 1+1+1+1+\ldots \\ \underline{1-1\qquad\qquad\qquad} \\ 1+1+1+1+\ldots \\ \underline{\quad -1-1-1-\ldots} \\ 1 \end{array}$$

Auf diese Art erhellt, daß das Product wirklich 1 ist.

§. 47.

Wie natürlich die Mathematik auf den Quotienten $\frac{1}{0}$ führt, und wie wenig daher derselbe eine bloß erdichtete Grille der Analysten sey, lehrt bekanntlich schon die Natur der trigonometrischen Linien. Denn, wenn man den Halbmesser des Kreises = 1 setzt, so ist für den Winkel A allemal $\frac{1}{\text{cos. A}} = \text{sec. A}$, $\frac{1}{\text{sec. A}} = \text{cos. A}$, und $1 = \text{cos. A} \cdot \text{sec. A}$. Nun ist für $A = 90^\circ$, $\text{sec. A} = \infty$, und $\text{cos. A} = 0$, folglich wird hier $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, und $1 = 0 \cdot \infty$. Nun scheint es zwar, als ob der dritte Satz $1 = 0 . \infty$ die Ungereimtheit enthalte, daß das Quadrat des Halbmessers so groß sey, als ein Rechteck, das die unendliche Secante zur Grundlinie und einen Punkt zur Höhe hat. Allein, wenn man sei-

seinen wahren Sinn untersucht, so ist seine Richtigkeit unstreitig. Man setze z. B. den Halbmesser = 1 Fuß; so ist sein Quadrat = 1 Quadratfuß, die Secante = ∞ Fuß, und der Cosinus = 0 Fuß. Nun aber ist nach dem zweiten Satze $0 = \frac{1}{\infty}$, folglich der Cosinus $= \frac{1}{\infty}$ Fuß, mithin ist das Rechteck aus der Secante ∞ und dem Cosinus $0 = \frac{1}{\infty} \cdot \infty$ Quadratfuß = 1 Quadratfuß. Also ist offenbar, daß dasselbe dem Quadrate des Halbmessers aufs genaueste gleich ist, wenn man nur den Gesetzen des Calculs strenge folgt, und nicht vergißt, daß die Null im dritten Satze vermöge des zweiten, aus welchem er gefolgert ist, ausdrücklich $\frac{1}{\infty}$ d. i. den unendlichten Theil von 1 vorstellt. Hiebei läßt sich noch die Frage aufwerfen, ob es auch eigentliche oder nur Kunstsprache sey, wenn man vom Cosinus, imgleichen von der Tangente und Secante eines rechten Winkels redet. Nach den gewöhnlichen Definitionen der trigonometrischen Linien scheint es bloß Kunstsprache zu seyn. Denn der Cosinus eines rechten Winkels ist der Sinus eines Winkels, der = 0, d. i. eines Winkels, der kein Winkel ist, und so scheint er kein Sinus zu seyn. Die Tangente und Secante eines Winkels wird durch den Punkt bestimmt, in welchem das

das Loth auf dem Endpunkte des Halbmessers, als des einen Schenkels, den andern Schenkel schneidet, und wo daher kein solcher Durchschnittspunkt stattfindet, welches gerade der Fall beim rechten Winkel ist, da scheint auch keine Tangente und Secante stattzufinden. Indessen muß ich gestehen, daß diese Folgerungen mir doch nicht befriedigend zu seyn scheinen. Denn, wenn man erstlich sagt: das Complement eines rechten Winkels ist kein Winkel mehr; so ist doch diese Sprache offenbar nicht im mindesten wahrer, natürlicher und eigentlicher, als wenn man sagt: das Complement des rechten Winkels ist = o. Vielmehr scheint der letztere Ausdruck mir noch weit eigentlicher zu seyn, als der erstere, so wie es z. B. in der Mathematik weit natürlicher und eigentlicher ist, zu sagen: die Differenz $2 - \frac{6}{3}$ ist = o, als: sie ist keine Differenz. Denn nach der Erklärung der Differenz a — x ist die eigentliche Frage die: was muß zu x hinzukommen, wenn ich a erhalten will? also ist hier, für x = a, die Antwort: es kommt o hinzu, oder die Differenz ist = o, noch eigentlicher und der Erklärung angemessener, als wenn man sagt: sie ist keine Differenz. Da nun das Complement eines Winkels nichts anders ist, als die Differenz zwischen ihm und dem rechten Winkel; so ist klar, daß auch der Ausdruck: das Complement des rechten Winkels ist = o, im ganz eigentlichen Sinne wahr ist, und in eben diesem

eigentlichen Sinne ist daher auch sein Sinus = 0. Denn der Sinus eines Winkels ist die halbe Sehne des Bogens, der zweymal so groß, als sein Maaß ist. Ist nun im ganz eigentlichen Sinne das Complement des rechten Winkels = 0; so ist hier auch in eben dem Sinne der erwähnte Bogen, und seine halbe Sehne, mithin sein Sinus = 0. Eben so paßt auch die Erklärung der Tangente und Secante in der That auf den Fall, da der Winkel ein rechter ist. Freilich fände dieses nicht Statt, wenn man sie so definiren wollte: die Tangente und Secante eines Winkels sind der Cathetus und die Hypotenuse des rechtwinklichten Dreyecks, das den Halbmesser des Kreises, als den einen Schenkel, zur Grundlinie hat, denn nach dieser Erklärung wird für den rechten Winkel das Dreyeck ein Unding (§. 9. n. 3.), mithin würde es auch seine Tangente und Secante. Aber wenn man wie gewöhnlich die Erklärung so einrichtet: die Tangente eines Winkels ist das Loth, welches auf dem Endpunkte des Halbmessers, als des einen Schenkels, bis zu dem Punkte fortgeht, wo es den andern Schenkel begrenzt, und letzterer bis zu diesem Punkte hin heißt seine Secante; so versteht man doch offenbar, da dieser Punkt immer weiter vom Halbmesser fortrücken kann, und daher jene beiden Linien sich immer mehr dem Parallelismus nähern können, auch den Fall schon mit hierunter, da sie wirklich in die parallele Lage kom-

kommen, und es keinen solchen Durchschnittspunkt mehr giebt; und wollte man dieses leugnen, so sehe ich nicht ab, warum man nicht befugt seyn sollte, die Definition auf folgende Art zu erweitern: die Tangente eines Winkels ist das Loth auf dem Endpunkte des Halbmessers, als des einen Schenkels, welches, wenn es mit dem andern Schenkel parallel ist, ohne Ende, sonst aber nur bis zu dem Punkte fortgeht, wo dasselbe den andern Schenkel schneidet. Der andere Schenkel aber, im erstern Falle gleichfalls ohne Ende, sonst aber bis zu eben dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte genommen, heißt die Secante des Winkels. Denn die Tangente und Secante des rechten Winkels ist eben sowol die größeste Tangente und Secante, als sein Sinus der größeste Sinus. Hält man nun mit Recht den größesten Sinus für einen wahren Sinus, was kann uns dann berechtigen, die größeste Tangente und Secante für keine wahre zu halten? Da überdem die Tangente und Secante, so lange der Winkel spitz ist, und sich immer mehr dem rechten nähert, positiv ist und beständig wächst, so bald er aber größer wird, als ein rechter, negativ wird und immer abnimmt; so müßten sie in diesem Falle, ehe sie aus der positiven Lage in die negative übergingen, erst in einen Zustand kommen, wo sie keine Tangente und Secante wären; eine solche Sprache aber würde doch, aufs gelindeste geurtheilt, wol offenbar noch weit un-

eigentlicher seyn. Inzwischen mag man die Tangente und Secante, imgleichen den Cosinus des rechten Winkels für eigentliche oder für bloße Kunstausdrücke halten; so ist doch die Annahme, daß $\sec. 90^o = \infty$ und $\cos. 90^o = 0$ sey, in der Analysis unentbehrlich, und eben daraus folgt, daß es auch die daraus hergeleiteten Sätze

$$\frac{1}{0} = \infty,\ \frac{1}{\infty} = 0,\ \text{und}\ 1 = 0 . \infty\ \text{sind.}$$

§. 48.

Da $\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots;$

so ist für $x = 1$, $\frac{a}{0} = a + a + a + a + \ldots \sim$.

Nun könnte es scheinen, daß, wenn $a > 1$ ist, dieser Quotient a mal größer wäre, als $\frac{1}{0}$, weil man statt $\frac{a}{0}$ setzen kann $a . \frac{1}{0}$, und statt

$$a + a + a + \ldots . \sim$$

wiederum $a . (1 + 1 + 1 + \ldots . \sim)$.

Allein, daß die Natur des Unendlichen nicht verstattet, beide Ausdrücke für gleichbedeutend zu halten und einen für den andern zu setzen, sondern zwar, wenn man $1 + 1 + 1 + \ldots \sim = \infty$ setzt, $a(1 + 1 + 1 + \ldots . \sim) = a . \infty$, dagegen aber $a + a + a + \ldots . \sim$ eben so groß, als $1 + 1 + 1 + \ldots . \sim$, nemlich $= \infty$ ist, das ist bereits §. 37. erwiesen worden. Durch

die

die vorhin angeführten trigonometrischen Formeln aber wird die Sache noch anschaulicher. Denn man setze (Fig. 5.) den Halbmesser AB des einen Kreises $= 1$, und den Halbmesser AC des andern $= r$; so wird für den erstern $\sec. A = \frac{1}{\cos. A}$, für den zweiten aber $\sec. A = \frac{r^2}{\cos. A}$, folglich wird für $A = 90^o$ der erstere $\sec. 90^o = \frac{1}{0}$, und der andere $\sec. 90^o = \frac{r^2}{0}$. Nun aber ist hier eben dieselbe unendliche Linie AD die Secante des rechten Winkels A sowol für den Halbmesser $AB = 1$, als für den Halbmesser $AC = r$. Also ist offenbar $\frac{r^2}{0} = \frac{1}{0}$ d. i. $r^2 + r^2 + r^2 + \ldots \sim = 1 + 1 + 1 + \ldots \sim$.

§. 49.

Eben dieses bestätigt sich auch auf folgende Weise. Da

$$\frac{a}{b-x} = \frac{a}{b} + \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} + \ldots \sim;$$

so ist, für $x = b$, $\frac{a}{0} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots \sim$,

also $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots \sim = a + a + a + \ldots \sim$,

und

und wenn man a = 1 setzt, so ist

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots \sim = 1 + 1 + 1 + \ldots \sim.$$

Noch allgemeiner aber erhellet, daß in jeder unendlichen Reihe Zahlen, deren Summe unendlich groß ist, diese Summe beständig $= 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \sim$ ist, wenn man a durch $(b - x)^n$ dividirt. Ist n eine ganze Zahl und größer als 1; so ist hier $\frac{a}{(b-x)^n} = \frac{a}{b^n}$

$$+ \frac{nax}{b^{n+1}} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)} \cdot \frac{ax^2}{b^{n+2}}$$

$$+ \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots\cdots (n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots\cdots (n-1)} \cdot \frac{ax^3}{b^{n+3}}$$

$$+ \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} \cdot \frac{ax^4}{b^{n+4}} + \ldots\ldots \sim,$$

wo von den Coefficienten der letzte im Zähler beim dritten Gliede $= n + 1$, beim vierten $= n + 2$, u. s. w. im Nenner aber überall $= n - 1$ ist. Setzt man z. B. $n = 2$; so ist

$$\frac{a}{(b-x)^2} = \frac{a}{b^2} + \frac{2ax}{b^3} + \frac{3ax^2}{b^4}$$

$$+ \frac{4ax^3}{b^5} + \ldots\ldots \sim.$$

Setzt

Setzt man n = 3; so ist

$$\frac{a}{(b-x)^3} = \frac{a}{b^3} + \frac{3ax}{b^4} + \frac{6ax^2}{b^5} + \frac{10ax^3}{b^6} + \frac{15ax^4}{b^7} + \ldots.$$

Nun setze man in der allgemeinen Formel x = b; so ist

$$\frac{a}{0} = \frac{a}{b^n} + \frac{na}{b^n} + \frac{3\cdot4\cdot5\cdots(n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}\cdot\frac{a}{b^n} + \frac{4\cdot5\cdot6\cdots(n+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}\cdot\frac{a}{b^n} + \ldots\sim.$$

Nimmt man also z. B. n = 2; so ist

$$\frac{a}{0} = \frac{a}{b^2} + \frac{2a}{b^2} + \frac{3a}{b^2} + \frac{4a}{b^2} + \frac{5a}{b^2} + \ldots\sim.$$

Setzt man n = 3; so ist

$$\frac{a}{0} = \frac{a}{b^3} + \frac{3a}{b^3} + \frac{6a}{b^3} + \frac{10a}{b^3} + \ldots\sim.$$

Setzt man n = 4; so ist

$$\frac{a}{0} = \frac{a}{b^4} + \frac{4a}{b^4} + \frac{10a}{b^4} + \frac{20a}{b^4} + \ldots\sim,$$

u. s. w.

Also ist in allen diesen unzähligen Reihen, so verschieden auch die Glieder in denselben wachsen, die unendliche Summe immer dieselbe, nemlich

$$\frac{a}{0} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\sim.$$

Setzt

Setzt man in denselben endlich $a = 1$, $b = 1$; so ist, wenn man nach der Reihe $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ u. s. w. setzt,

$$\frac{1}{0} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots \sim$$
$$\frac{1}{0} = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots \sim$$
$$\frac{1}{0} = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + \ldots \sim$$
$$\frac{1}{0} = 1 + 5 + 15 + 35 + 70 + \ldots \sim$$

u. s. w.

Auf diese Weise ist also nun völlig einleuchtend, daß die Größe der Glieder in die Größe der unendlichen Summe einer Reihe keinen Einfluß hat, und daß also diese nicht anders vergrößert werden kann, als wenn man sie, als ein Ganzes betrachtet, mehrere male nimmt. Und so muß man denn die Ausdrücke $\frac{a}{0}$ und a mal $\frac{1}{0}$ sehr wohl von einander unterscheiden, wenn man sich nicht in offenbare Widersprüche verwickeln will. Und dieses ist nicht nur eine neue und vollkommene Bestätigung, daß das Endliche gegen das Unendliche auch im arithmetischen Verhältnisse verschwinde, sondern es deckt uns auch den wahren Grund auf, warum es geschehen müsse. Denn man setze z. B. $\frac{1}{0} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots \sim$. Nun addire man z. B. auf beiden Seiten 1000; so ist $\frac{1}{0} + 1000 = 1001 + 2 + 3 + 4 + \ldots \sim$. Da nun die unendliche Summe einer Reihe durch die

Größe

Größe der Glieder gar nicht verändert wird; so ist eben aus diesem Grunde die zweite unendliche Summe der erstern gleich, also $\frac{1}{0} + 1000 = \frac{1}{0}$.

§. 50.

Nachdem nunmehr der Begriff und die Natur des absolut Unendlichgroßen entwickelt worden; so ist es, ehe wir zum relativen Unendlichen fortgehen, nöthig, noch zum Schlusse dieses Abschnittes zu untersuchen, was eigentlich der Begriff des absolut Unendlichkleinen in sich fasse. Unter einer unendlichkleinen Größe versteht man eine solche, die kleiner ist, als jede homogene endliche (§. 7.). So ist eine unendlich kleine Linie eine solche, die kleiner ist, als jede endliche Linie, und eine unendlich kleine Zahl eine solche, die kleiner ist, als jede endliche Zahl, u. s. w. Nun ist das, was kleiner ist, als ein anderes, nur ein Theil von diesem. Also ist eine unendlich kleine Größe von jeder homogenen endlichen Größe a nur ein Theil. Allein, ein endlichvielter Theil von ihr, d. i. $\frac{1}{n}a$, kann sie nicht seyn; denn, wenn a und n endlich sind, so ist auch $\frac{1}{n}a$ endlich, so klein auch a und so groß dagegen die Zahl n seyn mag. Also muß sie ein unendlichvielter Theil von a, d. i. $= \frac{1}{\infty}a$ seyn.

Die-

Dieser aber ist kein Theil von a, sondern genau = 0 . a (§. 41.) d. i. ein gänzlicher Mangel, das völlige Aufhören, oder die bloße Grenze von a. Also ist eine unendlichkleine Größe kein Theil einer gleichartigen endlichen, mithin, als Theil oder Größe betrachtet, ein wahres Unding, und wenn wir sagen: eine Größe wird unendlich klein; so heißt dieses nichts anders, als: sie hört völlig auf, eine Größe von derselben Art zu seyn, d. i. sie ist genau = 0.

Wenn man diesen Beweis unparteiisch und ohne vorgefaßte Meinung durchdenkt; so muß man dem großen Euler, der meines Wissens der erste war, der dieses ohne allen Rückhalt frey und öffentlich bekannte, schlechterdings beipflichten, daß unendlich kleine Größen, oder unendlich kleine Theile einer endlichen Größe wahre Widersprüche sind, und daß das, was wir unendlichklein nennen, nichts weiter als Null sey. Man kann dieses auch schon aus der gewöhnlichen Erklärung erkennen, daß eine unendlich kleine Größe kleiner sey, als jede Größe, die sich angeben läßt. Denn hieraus folgt, daß sich von ihr gar nichts angeben läßt, weil, wenn sich irgend etwas von ihr angeben ließe, sie um so mehr sich ganz müßte angeben lassen. Allein, wovon sich gar nichts angeben läßt, davon läßt sich auch gar nichts denken, also ist sie ein völliges Unding. Hier zeigt sich eben die große Unähnlichkeit

keit in den Begriffen des Unendlichgroßen und Unendlichkleinen. Das Unendlichgroße läßt sich zwar nie ganz angeben, nemlich in dem Sinne, daß wir es völlig übersehen könnten; aber je weiter wir es mit unsern Gedanken verfolgen, desto mehr läßt sich davon angeben, desto mehr zeigt sich es also als wahre Größe, und eben darin besteht das Unendliche seiner Größe, daß unsere endliche Vorstellung dasselbe nie ganz erreichen kann. Beim Unendlichkleinen dagegen läßt sich gar nichts angeben, folglich auch gar nichts denken; wovon sich aber gar nichts denken läßt, das ist auch Nichts. Um dieses desto evidenter zu übersehen, darf man nur Acht haben, was man z. B. sich wol unter einer unendlichkleinen Linie vorstellen könne. Bei einer Linie muß man doch zum wenigsten zwey Punkte denken können, denn ein Punkt ist keine Linie. Denkt man sich aber in ihr zwey Punkte; so denkt man sie sich durch dieselbe schon völlig begrenzt, also endlich. Also kann eine unendlichkleine Linie nur einen Punkt haben, d. i. keine Linie seyn. Sollten aber durchaus unendlichkleine Größen, oder unendlichkleine Theile einer endlichen Größe, z. B. unendlichkleine Linien, Flächen oder Körper möglich seyn, so müßten doch auch unendlichkleine Zahlen möglich seyn, weil ihr Verhältniß zu den endlichen Größen nur durch den Exponenten d. i. durch eine Zahl möglich ist, dieser aber bei einem unendlichkleinen Verhältnisse ebenfalls unendlich-

 klein

klein seyn muß. Aber mir eine Zahl zu denken, die kleiner als jede Zahl ist, dieses Kunststück, bekenne ich, verstehe ich nicht, denn hierunter denke ich mir keine Zahl, sondern die eigentliche Null. Man mag also die Vorstellung unendlich-kleiner Größen schmücken, wie man will, so wird dieselbe, wie sie es immer gewesen, jedem Unbefangenen immerfort, und zwar mit Recht, anstößig und widersprechend bleiben. Das einzige, was so viele berühmte und große Männer zu ihrer Beibehaltung und Vertheidigung hat veranlassen können, ist bloß die Meinung, daß die Analysis, und besonders ihr erhabenster Theil, die Differential- und Integralrechnung, schlechterdings erfordere, unendlichkleine Größen anzunehmen, und daß, wenn diese nichts weiter als Null wären, der ganze Grund jener Wissenschaften zernichtet werden würde. Allein, um das Fundament einer Wissenschaft fest zu legen, es auf widersprechende Begriffe gründen, bleibt doch immer ein sehr fruchtloses Mittel. Vielmehr sollte man eben hieraus schon ahnden, daß jene Furcht, die sogenannte Analysis des Unendlichen würde gänzlich über den Haufen fallen, wenn man das Unendlichkleine = 0 setzte, nothwendig ungegründet seyn müsse. Und so verhält es sich, nach meiner völligen Ueberzeugung, wirklich. Die ganze sogenannte Analysis des Unendlichen ist in der That nichts weiter, als eine ungemein künstliche Nullenrechnung. Dieses

habe

habe ich bereits in meiner oben angeführten Disputation zum Theil gezeigt, und wie strenge sich auf diese Art nicht nur die ganze Differential- und Integralrechnung an sich, sondern auch ihre Anwendung auf die höhere Geometrie und Mechanik behandeln läßt, habe ich bereits wirklich versucht, und bloß Mangel der Zeit ist es, der mich die Bekanntmachung desselben noch auszusetzen nöthigt. Weit gefehlt also, daß dadurch die Gründlichkeit und Zuverlässigkeit der höhern Analysis oder auch ihre erhabene Würde litte. Bloß auf diesem Wege wird sie wahre demonstrative Wissenschaft, und eben hier erscheint sie in einer Würde, die der menschliche Verstand sich nicht erhabener denken kann.

Der ersten Abtheilung Zweiter Abschnitt.

Vom relativ Unendlichen.

§. 51.

Wenn eine Größe b größer ist, als jedes endliche Multiplum einer andern a, d. i. wenn $b > na$ ist, man mag für n eine so große ganze Zahl annehmen, als man will; so heißt b gegen a unendlichgroß, und a gegen b unendlichklein, so groß oder klein auch übrigens *a* an sich seyn mag.

§. 52.

Hieraus fließen sogleich folgende Sätze:

1. Jede endliche Größe, so groß sie immer seyn mag, ist gegen eine absolut unendlichgroße allemal unendlichklein (§. 10.)

2. Da $\frac{a}{o} = \infty$ (§. 48.); so ist jede endliche Größe gegen o unendlichgroß, und da $\frac{\infty^n}{o} = \infty^n \cdot \frac{1}{o} = \infty^{n+1}$, so ist um so mehr jede absolut unendlichgroße Größe gegen o unendlichgroß. Also ist o gegen jede sowol endliche als unend-

unendliche Größe, d. i. gegen jede mögliche Größe, unendlichklein.

3. Eine endliche Größe kann gegen eine andere endliche weder unendlichgroß, noch unendlichklein seyn (§. 10.).

4. Da also das Endliche weder gegen ein anderes Endliches (n. 3.), noch gegen ein absolut Unendlichgroßes (n. 1.) unendlichgroß seyn kann; so kann es bloß gegen das Unendlichkleine d. i. gegen o (§. 50.) unendlichgroß seyn (n. 2.).

5. Da das absolut Unendlichkleine = o (§. 50.), eine Null aber so groß ist, als die andere; so kann ein absolut Unendlichkleines gegen ein anderes weder unendlichgroß, noch unendlichklein seyn.

§. 53.

Wenn $b > na$ ist, so ist $\frac{b}{n} > a$; und umgekehrt, wenn $\frac{b}{n} > a$ ist, so ist $b > na$. Wenn also b gegen a unendlichgroß ist, so ist a kleiner, als jeder nte Theil von b, so groß auch n seyn mag; und umgekehrt, wenn a kleiner ist, als jeder nte Theil von b, so ist b gegen a unendlichgroß (§. 51.). Also heißt auch, b gegen a unendlichgroß, und a gegen b unendlichklein, so viel, als: a ist kleiner als jeder nte Theil von b, d. i. a ist ein unendlichvielter Theil von b.

§. 54.

Wenn m, n, r, s beliebige ganze Zahlen sind, aber $\frac{m}{n} > \frac{r}{s}$ ist; so ist $\infty^{\frac{m}{n}}$ gegen $\infty^{\frac{r}{s}}$ unendlichgroß, z. B. $\infty^{\frac{3}{4}}$ ist gegen $\infty^{\frac{2}{3}}$ unendlichgroß. Denn $\infty^{\frac{m}{n}} : \infty^{\frac{r}{s}} = \infty^{\frac{m}{n} - \frac{r}{s}} : 1$. Nun ist $\frac{m}{n} - \frac{r}{s}$ positiv, folglich $\infty^{\frac{m}{n} - \frac{r}{s}}$ eine absolut unendlichgroße Größe, mithin gegen 1 unendlichgroß (§. 52. n. 1.) Also ist auch $\infty^{\frac{m}{n}}$ gegen $\infty^{\frac{r}{s}}$ unendlichgroß.

§. 55.

Wenn man daher für $\frac{m}{n}, \frac{r}{s}$ ein paar ganze Zahlen u, v nimmt, und $u > v$ ist; so ist ∞^u gegen ∞^v unendlichgroß. Also ist ∞ gegen ∞^0, ∞^2 gegen ∞, ∞^3 gegen ∞^2 u. s. w. unendlichgroß, und umgekehrt ∞^0 gegen ∞, ∞ gegen ∞^2, ∞^2 gegen ∞^3 u. s. w. unendlichklein.

§. 56.

§. 56.

Wenn $\frac{m}{n} > \frac{r}{s}$ ist, so ist $\infty^{-\frac{m}{n}}$ gegen $\infty^{-\frac{r}{s}}$ unendlichklein. Denn da $\infty^{-\frac{r}{s}} : \infty^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\infty^{\frac{r}{s}}} : \frac{1}{\infty^{\frac{m}{n}}} = \infty^{\frac{m}{n}} : {}^{\frac{r}{s}}$; so ist $\infty^{-\frac{r}{s}}$ gegen $\infty^{-\frac{m}{n}}$ unendlichgroß (§. 54.), also $\infty^{-\frac{m}{n}}$ gegen $\infty^{-\frac{r}{s}}$ unendlichklein (§. 51.).

§. 57.

Setzt man daher für $\frac{m}{n}$, $\frac{r}{s}$ ganze Zahlen u, v, und u > v; so ist ∞^{-u} gegen ∞^{-v} unendlichklein. Also ist ∞^{-1} gegen ∞^{-0}, ∞^{-2} gegen ∞^{-1}, ∞^{-3} gegen ∞^{-2} u. s. w. unendlichklein.

§. 58.

Es ist allemal $\frac{1}{\infty^{\frac{u}{v}}} = 0$, was für ganze Zahlen auch u, v seyn mögen. Denn man setze $\frac{1}{\infty^{\frac{u}{v}}} = x$; so ist $\frac{1}{\infty^{u}} = x^{v}$. Nun ist $\frac{1}{\infty^{u}} = 0$ (§. 41.), folglich $x^{v} = 0$, also $x = 0$.

§. 59.

Wenn $\infty^{\frac{m}{n}}$ gegen $\infty^{\frac{r}{s}}$ unendlich groß ist; so ist $\infty^{\frac{m}{n}} + \infty^{\frac{r}{s}} = \infty^{\frac{m}{n}}$. Denn hier ist $\frac{m}{n} > \frac{r}{s}$ und $\infty^{\frac{m}{n}} : \infty^{\frac{r}{s}} = \infty^{\frac{ms-nr}{ns}} : 1$ (§. 54.) $= 1 : 0$ (§. 58.), folglich auch $\infty^{\frac{m}{n}} + \infty^{\frac{r}{s}} : \infty^{\frac{r}{s}} = 1 + 0 : 0 = 1 : 0$. Also $\infty^{\frac{m}{n}} + \infty^{\frac{r}{s}} = \infty^{\frac{m}{n}}$. Eben dieses läßt sich auch auf folgende Art beweisen: Gesetzt, es wäre $\infty^{\frac{m}{n}} + \infty^{\frac{r}{s}} > \infty^{\frac{m}{n}}$; so wäre

$$1 + \infty^{\frac{r}{s} - \frac{m}{n}} > 1 \text{ d. i. } 1 + \infty^{-\left(\frac{m}{n} - \frac{r}{s}\right)} > 1,$$

folglich $1 + \frac{1}{\infty^{\frac{m}{n} - \frac{r}{s}}} > 1$, also $1 > 1$ (§. 58.).

§. 60.

Da nun $\infty^{\frac{m}{n}}$ und $\infty^{\frac{r}{s}}$ beide absolut unendlich groß sind; so verschwindet auch jede absolut unendliche Größe, die gegen eine andere unendlich klein ist, gegen diese nicht nur im geometrischen, sondern auch im arithmetischen Verhältnisse (§. 59.).

§. 61.

Wenn $\infty^{-\frac{r}{s}}$ gegen $\infty^{-\frac{m}{n}}$ unendlich groß ist; so ist $\infty^{-\frac{r}{s}} + \infty^{-\frac{m}{n}} = \infty^{-\frac{r}{s}}$. Denn da hier $\infty^{-\frac{r}{s}} > \infty^{-\frac{m}{n}}$, folglich $\frac{1}{\infty^{\frac{r}{s}}} > \frac{1}{\infty^{\frac{m}{n}}}$; so ist $\frac{m}{n} > \frac{r}{s}$. Nun ist $\infty^{-\frac{r}{s}} : \infty^{-\frac{m}{n}} = \infty^{\frac{m}{n}} : \infty^{\frac{r}{s}}$ $= \infty^{\frac{ms-nr}{ns}} : 1$ (§. 54.). Also ist $\infty^{-\frac{r}{s}} + \infty^{-\frac{m}{n}}$ $= \infty^{-\frac{r}{s}}$ (§. 58.).

§. 62.

Da nun $\infty^{-\frac{r}{s}} = \frac{1}{\infty^{\frac{r}{s}}}$, und $\infty^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\infty^{\frac{m}{n}}}$; so sind beide was absolut unendlich kleines (§. 7.). Also verschwindet auch jedes absolut Unendlich-kleine, das gegen ein anderes unendlichklein ist, gegen dieses nicht nur im geometrischen, sondern auch im arithmetischen Verhältnisse (§. 61.)

§. 63.

Hieraus folgt also allgemein, daß überhaupt alles, was gegen ein anderes unendlichklein ist,

gegen dieses nicht nur im geometrischen, sondern auch im arithmetischen Verhältnisse verschwindet. Denn alles, was gegen ein anderes unendlich-klein ist, ist entweder 1) ein absolut Unendlich-kleines gegen ein anderes absolut Unendlichkleines, oder gegen ein Endliches, oder gegen ein Unendlichgroßes, oder es ist 2) ein Endliches gegen ein absolut Unendlichgroßes, oder 3) ein absolut Unendlichgroßes gegen ein anderes. Im dritten Falle ist der Satz nach §. 59. wahr, im zweiten nach §. 40., im ersten aber nach §. 61.

§. 64.

Ich habe hier die Ausdrücke $\infty^{-\frac{m}{n}}$, $\infty^{-\frac{r}{s}}$, die zwar den Schein des Unendlichgroßen haben, aber bloß was absolut Unendlichkleines, nemlich $\frac{1}{\infty^{\frac{m}{n}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{r}{s}}}$ vorstellen, nur zu dem Zwecke mitbetrachtet, um allgemein zu zeigen, was der Calcul auch in Ansehung des absolut Unendlich-kleinen geben würde, wofern dieses eine wirkliche Größe wäre. Da aber dasselbe $= 0$ ist, und daher ein absolut Unendlichkleines gegen das andere weder unendlichgroß, noch unendlichklein seyn kann (§. 52. n. 5.); so sind die Sätze §. 56. 57. 61. 62. ganz leere Sätze, ohne Sinn und Bedeutung.

§. 65.

Wenn b, c absolut unendlich groß sind, und c gegen b relativ unendlich groß ist; so heißt c ein Unendlichgroßes einer höhern Ordnung, als b. Da nun $\infty^{\frac{m}{n}}$ allemal gegen $\infty^{\frac{r}{s}}$ unendlich groß ist, wenn $\frac{m}{n} > \frac{r}{s}$ ist (§. 54.); so bestimmt man die Höhe der Ordnung durch den Exponenten. Nemlich $\infty^{\frac{m}{n}}$ heißt ein Unendlichgroßes von der Ordnung $\frac{m}{n}$, $\infty^{\frac{r}{s}}$ eins von der Ordnung $\frac{r}{s}$, und so heißt z. B. ∞ ein Unendlichgroßes der ersten Ordnung, ∞^2 eins der zweiten, ∞^3 eins der dritten, $\infty^{\frac{3}{2}}$ eins von der Ordnung $\frac{3}{2}$ u. s. w.

§. 66.

Wenn $b : a = \infty^{\frac{m}{n}} : 1$ ist; so heißt a gegen b ein Unendlichkleines der $\frac{m}{n}$ten Ordnung, d. i. die Ordnung, um welche b höher ist, als a, ist $= \frac{m}{n}$. Hieraus fließt also folgendes:

1. Das

1. Das absolut Unendlichkleine oder 0 ist gegen jede endliche Größe a ein Unendlichkleines der ersten Ordnung, weil $a:0 = a \cdot \infty : 1$, gegen ∞ ein Unendlichkleines der 2ten Ordnung, weil $\infty : 0 = \infty \cdot \frac{1}{0} : 1 = \infty^2 : 1$, gegen ∞^2 ein Unendlichkleines der dritten Ordnung, weil $\infty^2 : 0 = \infty^2 \cdot \frac{1}{0} : 1 = \infty^3 : 1$, und überhaupt gegen ∞^n ein Unendlichkleines der $(n+1)$ten Ordnung, weil $\infty^n : 0 = \infty^n \cdot \frac{1}{0} : 1 = \infty^{n+1} : 1$ ist.

2. Jede endliche Größe a ist gegen ∞ ein Unendlichkleines der ersten, gegen ∞^2 eins der zweiten, und überhaupt gegen ∞^n eins der nten Ordnung, weil $\frac{a}{\infty^n} = \frac{1}{\infty^n}$, folglich $\infty^n : a = \infty^n : 1$ ist.

3. Jede absolut unendlichgroße Größe $\infty^{\frac{r}{s}}$ ist gegen eine andere $\infty^{\frac{m}{n}}$, wenn $\frac{m}{n} > \frac{r}{s}$ ist, ein Unendlichkleines der $\left(\frac{m}{n} - \frac{r}{s}\right)$ten Ordnung, weil $\infty^{\frac{m}{n}} : \infty^{\frac{r}{s}} = \infty^{\frac{m}{n} - \frac{r}{s}} : 1$ ist. So ist z. B. ∞^2 gegen ∞^3 ein Unendlichkleines der ersten Ordnung, weil $3 - 2 = 1$ ist, ∞^2 gegen $\infty^{2\frac{3}{4}}$ ein Unendlichkleines der Ordnung $\frac{3}{4}$ u. s. w.

4. Jede

4. Jede Größe a, die gegen eine andere b ein Unendlichkleines der $\frac{m}{n}$ten Ordnung ist, so klein auch $\frac{m}{n}$ seyn mag, verschwindet gegen b sowol im arithmetischen, als geometrischen Verhältnisse (§. 63.)

§. 67.

Nach diesen Begriffen kann man sich unendlich viele Ordnungen des Unendlichgroßen aussinnen, ohne bei irgend einer stille zu stehen. So kann man von ∞^n bis zu ∞^∞, von dieser bis zu ∞^{∞^∞} und so ohne Ende weiter steigen. Die verschiedenen Ordnungen des Unendlichgroßen sind auch nicht bloß willkührliche Erdichtungen, sondern die Analysis führt wirklich auf dieselben. Dieses zeigte schon die §. 42. angeführte Formel $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty$ in Ansehung der Ordnungen ∞^2, ∞^3 u. s. w., und daß man in der Analysis auch auf Potenzen des Unendlichen mit gebrochenen Exponenten kommt, lehrt schon die Gleichung für die Parabel $y^2 = bx$. Denn für $x = \infty$ wird hier $y = b^{\frac{1}{2}} \infty^{\frac{1}{2}}$. Aber hier entsteht nun die wichtige Frage: haben die

Aus-

Ausdrücke ∞^2, ∞^3, ∞^4, $\infty^{\frac{1}{2}}$, $\infty^{\frac{3}{4}}$, $\infty^{\frac{3}{2}}$ u. s. w. auch objective Realität? d. i. giebt es auch in der That unendliche Größen, auf welche der Werth dieser Ausdrücke anwendbar ist? Oder sind sie bloß leere Zeichen, die nur zum Behuf der Rechnung dienen, übrigens aber gar nichts bedeuten? Da die Ausdrücke ∞^{-2}, ∞^{-3}, $\infty^{-\frac{2}{3}}$ u. s. w. bloß den Schein haben, als ob sie verschiedene Ordnungen des Unendlichkleinen anzeigten, da sie doch alle bloße Nullen sind, da ferner bei der Parabel kein Zweifel stattfindet, daß in der Gleichung $y = b^{\frac{1}{2}} \infty^{\frac{1}{2}}$ der Ausdruck $\infty^{\frac{1}{2}}$ etwas Widersprechendes ist, weil die Ordinate y einer unendlichen Abscisse x dergleichen ist (§. 9. n. 4.); so kann dieses leicht den Verdacht erwecken, ob es nicht mit den Ausdrücken ∞^2, ∞^4, $\infty^{\frac{1}{2}}$, $\infty^{\frac{5}{4}}$ u. s. w. überhaupt eben die Bewandtniß haben mag. Sind aber diese Ausdrücke nicht leere analytische Zeichen, sondern stellen sie wirkliche Größen vor; so frägt es sich nun weiter: welches sind diese Größen, die dadurch ausgedruckt werden? und wie weit geht endlich die Realität gedachter Ordnungen des Unendlichgroßen? Sind alle Ordnungen desselben, so viel sich ihrer nur erdenken lassen, was Reales? oder sind es nur einige? und giebt es etwa eine gewisse Ordnung,

deren

deren Höhe die Grenze ist, die keine mögliche Größe übersteigen kann? Da nun die Ausdrücke des Unendlichgroßen nur dann Realität haben, wenn sie sich im Raum durch unendliche Linien, Flächen oder körperliche Räume darstellen lassen (§. 24.); so ist klar, daß alle jene wichtige Fragen sich bloß aus der Geometrie beantworten lassen. Also beruht die Beurtheilung, ob und wie fern die Ordnungen des Unendlichgroßen was Reales, oder bloße hevristische Fictionen und nichtsbedeutende Ausdrücke sind, lediglich auf einer Wissenschaft, die meines Wissens noch nicht existirt, nemlich auf der Geometrie oder Meßkunst des Unendlichgroßen. Ich will daher in der zweiten Abtheilung einen Versuch machen, ob und wie weit sich die Anfangsgründe dieses ohne Zweifel erhabensten Theils der Meßkunst mit gehöriger Deutlichkeit und Schärfe festsetzen lassen. Um aber diese ohnehin schwere Untersuchung nicht unnöthiger Weise durch beständige Rücksicht auf die Irrationalverhältnisse noch mehr erschweren zu dürfen, will ich zum Schlusse dieses Abschnitts ein allgemeines Criterium der Proportionalität vorauschicken, das wegen seiner Leichtigkeit, und ungemein bequemen Anwendbarkeit, wie ich mir schmeichele, unparteyischen Freunden der Mathematik schon an sich nicht unangenehm seyn wird.

Schlußbetrachtung.

Beweis eines allgemeinen und bequemen Kennzeichens der Proportionalität.

§. 68.

Die Größe a heißt ein aliquoter Theil von b, oder das Maaß von b, wenn a etliche male genommen b giebt, d. i. wenn z. B. $b = na$, oder $a = \frac{b}{n}$ ist, vorausgesetzt, daß n eine ganze Zahl ist.

§. 69.

Wenn a ein aliquoter Theil von b ist, so ist auch jeder aliquote Theil c von a, ein aliquoter Theil von b.

Denn da hier $b = na$, und $a = mc$ (§. 68.); so ist $b = nmc$, und $\frac{b}{nm} = c$, also c ein aliquoter Theil von b (§. 68.).

§. 70.

Wenn zwo homogene endliche Größen a, b von der Art sind, daß irgend ein aliquoter Theil der einen zugleich ein aliquoter Theil der andern ist; so nennt man diesen ihr gemeinschaftliches Maaß, die Größen a, b selbst aber commensurable, oder Rationalgrößen, ihr geometri-

sches

sches Verhältniß ein rationales, und den Exponenten desselben eine Rationalzahl.

§. 71.

Also sind, wenn $b > a$ ist, a, b Rationalgrößen, und ihr Verhältniß ein rationales, wenn es entweder eine solche ganze Zahl n giebt, daß $b = na$, und $a = \frac{b}{n}$ ist (§. 69.), oder wenn es wenigstens einen solchen Bruch $\frac{n}{m}$ giebt, daß $b = n \cdot \frac{a}{m}$ und $a = m \cdot \frac{b}{n}$ ist (§. 70.), d. i. wenn im Verhältnisse $b : a$ der Exponent entweder eine ganze Zahl n, oder ein Bruch $\frac{n}{m}$ ist.

§. 72.

Also ist jede Rationalzahl entweder eine ganze Zahl, oder ein Bruch, dessen Zähler und Nenner endliche ganze Zahlen sind, und umgekehrt; alle solche Brüche und alle ganze Zahlen sind Rationalzahlen (§. 70. 71.).

§. 73.

Wenn zwo homogene endliche Größen a, b kein gemeinschaftliches Maaß haben, d. i. wenn kein aliquoter Theil der einen ein aliquoter Theil der andern ist; so nennt man sie incommensurable oder Irrationalgrößen, ihr geometrisches Ver-

hältniß ein Irrationalverhältniß, und den Exponenten desselben eine Irrationalzahl.

§. 74.

Also sind, wenn $b > a$ ist, a, b Irrationalgrößen, und ihr Verhältniß ist ein Irrationalverhältniß, wenn weder $b = na$, noch $b = n \cdot \frac{a}{m}$, d. i. wenn im Verhältnisse $b : a$ der Exponent weder eine ganze Zahl n, noch irgend ein Bruch $\frac{n}{m}$ ist, dessen Zähler und Nenner endliche ganze Zahlen sind (§. 71. 73.).

§. 75.

Also ist eine Irrationalzahl weder eine ganze Zahl, noch irgend ein Bruch, dessen Zähler und Nenner endliche ganze Zahlen sind (§. 73. 74.), mithin läßt sie sich niemals genau angeben.

§. 76.

Wenn a, b Irrationalgrößen sind, und $b > a$ ist; so giebt es für jeden angenommenen aliquoten Theil $\frac{a}{m}$ eine solche ganze Zahl n, daß $n \cdot \frac{a}{m} < b$, aber $(n + 1) \cdot \frac{a}{m} > b$ ist (§. 5.), d. i. es giebt für jeden Nenner m einen solchen

Zäh-

Zähler n, daß der Bruch $\frac{n}{m}$ kleiner, aber $\frac{n+1}{m}$ schon größer ist, als der Exponent des Irrationalverhältnisses b : a.

§. 77.

Wenn im Irrationalverhältnisse b:a der Exponent $z > 1$ ist, so ist $b > a$. Wenn also eine Irrationalzahl $z > 1$ ist, so giebt es für jeden angenommenen Nenner m einen solchen Zähler n, daß $\frac{n}{m} < z$, aber $\frac{n+1}{m} > z$ ist (§. 73. 76.).

§. 78.

Wenn im Irrationalverhältnisse b : a, $b > a$ ist, so liegt der Werth von b allemal zwischen $n \cdot \frac{a}{m}$ und $(n+1) \cdot \frac{a}{m}$ (§. 76.). Nun ist $(n+1) \cdot \frac{a}{m} - n \cdot \frac{a}{m} = \frac{a}{m}$, folglich differirt sowol $n \cdot \frac{a}{m}$ von b, als b von $(n+1) \cdot \frac{a}{m}$ weniger, als $\frac{a}{m}$ beträgt. Da man nun m so groß annehmen kann, als man will (§. 76.); so kann $\frac{a}{m}$ so klein werden, als man will. Also giebt es im Irrationalverhältnisse b : a, wenn

b>a ist, allemal eine Größe $\frac{n}{m}$a, die von b so wenig differirt, als man nur will, oder, welches einerley ist, es giebt allemal einen Bruch $\frac{n}{m}$, der vom wahren Exponenten des Verhältnisses so wenig differirt, als man will. Und so giebt es also auch für jede Irrationalzahl z, die größer als 1 ist, einen Bruch $\frac{n}{m}$, der von ihr so wenig differirt, als man nur will.

§. 79.

Wenn im Irrationalverhältnisse b:a der Exponent oder die Irrationalzahl z>1 ist; so giebt es für den Nenner 1 eine ganze Zahl $\frac{n}{1}$, die von z um weniger differirt, als 1. Setzt man den Nenner m=10; so giebt es einen Bruch $\frac{u}{10}$, der von z um weniger als $\frac{1}{10}$ differirt, mithin enthält die Zahl u außer der Ziffer n, welche die vorige Zahl der Einer anzeigte, noch eine Ziffer c für die Zehntheilchen, und statt $\frac{u}{10}$ kann man also $\frac{nc}{10}$ schreiben. Nimmt man 100 zum Nenner

ner an; so bekommt man die Ziffer d der Hunderttheilchen, mithin den Bruch $\frac{ncd}{100}$, der von z um weniger als $\frac{1}{100}$ differirt. Nimmt man 1000 zum Nenner an; so bekommt man noch die Ziffer e der Tausendtheilchen, folglich den Bruch $\frac{ncde}{1000}$, der von z um weniger als $\frac{1}{1000}$ differirt. Und so bekommt man, wenn man den Nenner immer 10 mal größer annimmt, den Decimalbruch $\frac{ncdefgh\ldots}{1000000\ldots}$ oder n,cdefgh..., der von z um weniger differirt, als 0,000001, also immer weniger, je größer die Zahl der Decimalziffern wird. Also läßt sich der Exponent eines jeden Irrationalverhältnisses b : a, wenn $b > a$ ist, mithin jede Irrationalzahl z, die größer als 1 ist, durch einen Decimalbruch ausdrucken, der dem wahren Werthe von z immer näher kommt, je mehrere Decimalziffern derselbe enthält. So ist z. B. die Irrationalzahl $\sqrt{2} =$ 1,4142136...., $\sqrt[3]{2} =$ 1,2599205....

Läßt man nun im Decimalbruche $\frac{ncdefgh\ldots}{1000000\ldots}$ die Menge der Nullen im Nenner ohne Ende wachsen, so wächst auch die Menge der Decimalziffern c, d, e u. s. w. im Zähler ohne Ende,

und der Bruch, den man sich auf diese Weise vorstellt, differirt, weil der Nenner $= \infty$ ist, von z nur um $\frac{1}{\infty}$, d. i. um Nichts. Also ist der Exponent eines jeden Irrationalverhältnisses b:a, wenn b > a ist, mithin jede Irrationalzahl z, die größer als 1 ist, ein Decimalbruch n,cdefgh.....∼, der unendlich viele Decimalziffern enthält, und in welchem jede Decimalziffer ohne Ende fort gegeben ist, oder die Summe einer unendlichen Reihe $\frac{n}{1} + \frac{c}{10} + \frac{d}{100} + \frac{e}{1000} + \frac{f}{10000} + \frac{g}{100000} \ldots + \frac{h}{1000000} + \ldots \sim$. So ist z. B. der Werth von $\sqrt{2}$ genau $= 1{,}4142136 \ldots\ldots \sim = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \ldots\ldots \sim$, wenn man sich nemlich die ganze mögliche Reihe der Decimalziffern vorstellt, deren jede ohne Ende fort ihren bestimmten oder gegebenen Werth hat.

§. 80.

Wenn im Irrationalverhältnisse a:b, b > a ist; so giebt es für jeden angenommenen aliquoten Theil $\frac{b}{r}$ eine solche ganze Zahl m, daß $m \cdot \frac{b}{r} < a$, aber $m \cdot \frac{b}{r-1} > a$ ist. Denn

da $n \cdot \frac{a}{m} < b$ und $(n+1) \cdot \frac{a}{m} > b$ ist (§. 76.); so ist $m \cdot \frac{b}{n+1} < a$ und $m \cdot \frac{b}{n} > a$. Setzt man also $n+1 = r$; so ist $m \cdot \frac{b}{r} < a$, und $m \cdot \frac{b}{r-1} > a$.

§. 81.

Wenn im Irrationalverhältnisse a:b der Exponent $z < 1$ ist; so ist $b > a$. Wenn also eine Irrationalzahl $z < 1$ ist; so giebt es für jeden Nenner r einen solchen Zähler m, daß $\frac{m}{r} < z$, aber $\frac{m}{r-1} > z$ ist (§. 80.). Nun ist $\frac{m}{r-1} - \frac{m}{r} = \frac{m}{r} \cdot \frac{1}{r-1}$ und $\frac{m}{r} \cdot \frac{1}{r-1} < \frac{1}{r-1}$, folglich differirt $\frac{m}{r}$ von z weniger, als $\frac{1}{r-1}$ beträgt, und daher differirt auch $m \cdot \frac{b}{r}$ von a weniger, als $\frac{1}{r-1}$ beträgt. Verfährt man also hier, wie §. 79.; so ist leicht zu übersehen, daß auch der Exponent eines jeden Irrationalverhält-

nisses a:b, wenn $b > a$, mithin auch jede Irrationalzahl z, die kleiner als 1 ist, ein Decimalbruch o, cdefgh .... ∾, der unendlich viele Decimalziffern enthält, von denen jede ohne Ende fort gegeben ist, oder die Summe einer unendlichen Reihe: $\frac{o}{1} + \frac{c}{10} + \frac{d}{100} + \frac{e}{1000} + \ldots \sim$ ist. Also ist überhaupt in jedem Irrationalverhältnisse, der Exponent desselben, d. i. die Irrationalzahl z, mag größer, oder kleiner als 1 seyn, z allemal ein Decimalbruch n, cdefgh .. ∾, von unendlich vielen Decimalziffern, die alle gegeben sind, oder die Summe einer unendlichen Reihe Brüche $\frac{n}{1} + \frac{c}{10} + \frac{d}{100} + \frac{e}{1000} + \ldots \sim$, wo alle Zähler eben sowol als die Nenner, ohne Ende gegeben sind.

§. 82.

Jede Irrationalzahl z ist, obgleich wir sie nie ganz genau angeben können, dennoch ihrem Werthe nach eine endliche Zahl. Denn ist $z > 1$; so ist $\frac{n}{m} < z$ und $\frac{n+1}{m} > z$ (§. 77.). Ist aber $z < 1$; so ist $\frac{m}{r} < z$ und $\frac{m}{r-1} > z$ (§. 81.). Also ist in beiden Fällen z weder unendlichklein, noch unendlichgroß (§. 7.), mithin endlich.

§. 83.

Wenn zwo endliche Größen a, b mit irgend zwo andern Größen c, d in solcher Verbindung stehen, daß, wenn $\frac{n}{m}a < b$ und $\frac{n+1}{m}a > b$ ist, auch allemal $\frac{n}{m}c < d$ und $\frac{n+1}{m}c > d$ ist, man mag die ganze Zahl m so groß annehmen, als man will; so ist $c:d = a:b$.

Denn gesetzt, die vierte Proportionalgröße wäre nicht b, sondern g; so wäre $c:d = a:g$. Da nun $\frac{n}{m}c : c = \frac{n}{m}a : a$, (weil in beiden Verhältnissen der Exponent $= \frac{n}{m}$ ist), ingleichen da $\frac{n+1}{m}c : c = \frac{n+1}{m}a : a$, (weil in beiden Verhältnissen der Exponent $= \frac{n+1}{m}$ ist); so wäre $\frac{n}{m}c : d = \frac{n}{m}a : g$, und $\frac{n+1}{m}c : d = \frac{n+1}{m}a : g$ (ordinatim et ex aequo).

Nun setze man erstlich $g < b$; so ist $b - g = p$. Da man nun m so groß annehmen kann, als man will (p. hyp.); so kann man m so groß

annehmen, daß $\frac{1}{m}a < p$ ist (§. 6.). Nun ist $\frac{n+1}{m}a > b$ (p. hyp.), folglich $b - \frac{n}{m}a < \frac{n+1}{m}a - \frac{n}{m}a$, folglich $b - \frac{n}{m}a < \frac{1}{m}a$, mithin $b - \frac{n}{m}a < p$, folglich $\frac{n}{m}a > b - p$, folglich $\frac{n}{m}a > g$, also $\frac{n}{m}c > d$. Da nun dieses wider die Annahme streitet; so kann nicht $g < b$ seyn.

Man setze ferner $g > b$; so ist $g - b = p$, und man kann wieder m so groß annehmen, daß $\frac{1}{m}a < p$ ist (§. 6.). Nun ist $\frac{n}{m}a < b$ (p. hyp.), folglich $\frac{n+1}{m}a - b < \frac{n+1}{m}a - \frac{n}{m}a$, d. i. $\frac{n+1}{m}a - b < \frac{1}{m}a$, folglich $\frac{n+1}{m}a - b < p$, folglich $\frac{n+1}{m}a < b + p$, folglich $\frac{n+1}{m}a < g$, also auch $\frac{n+1}{m}c < d$. Da nun dieses gleichfalls wider die Annahme ist; so kann auch nicht $g > b$ seyn. Also ist $g = b$, folglich $c : d = a : b$.

§. 84.

§. 84.

Wenn eine endliche Größe A mit irgend einer andern Größe B in solcher Verbindung steht, daß jeder Theil a, den man in A annimmt, einen gewissen Theil b in B giebt, und zwar so, daß ma allemal mb giebt, man mag die ganze Zahl m so groß annehmen, als man will; so giebt auch $\frac{n}{m}$a allemal $\frac{n}{m}$b.

Denn man setze, $\frac{1}{m}$a gebe den Theil d; so giebt, vermöge der Voraussetzung, m · $\frac{1}{m}$a den Theil md, d. i. a giebt md. Nun aber giebt a den Theil b (p. hyp.), folglich ist md = b, also d = $\frac{1}{m}$b. Also giebt $\frac{1}{m}$a den Theil $\frac{1}{m}$b, folglich giebt, vermöge der Voraussetzung, n · $\frac{1}{m}$a den Theil n · $\frac{1}{m}$b, d. i. $\frac{n}{m}$a giebt $\frac{n}{m}$b.

§. 85.

Wenn eine endliche Größe A mit irgend einer andern B in solcher Verbindung steht, daß jeder

jeder Theil a, den man in A annimmt, einen gewissen Theil b in B giebt, und zwar so, daß ma allemal mb giebt, man mag die ganze Zahl m so groß annehmen, als man will; so giebt ein größerer Theil α in A auch allemal einen größern Theil β in B.

Denn man setze $\alpha = a + p$; so ist das Verhältniß $a : p$ entweder rational, oder irrational. Gesetzt also erstlich, es sey rational, nemlich

$a : p = m : n$; so ist $p = \frac{n}{m} a$, folglich

$\alpha = a + \frac{n}{m} a = \frac{m+n}{m} a$, mithin ist der

Theil β, den α giebt, $= \frac{m+n}{m} b$ (§. 84.)

$= b + \frac{n}{m} b$. Also ist $\beta > b$.

Gesetzt aber zweitens, das Verhältniß $a : p$ wäre irrational; so ist entweder $p > a$, oder $p < a$.

Ist $p > a$; so ist $\frac{n}{m} a < p$, und $\frac{n+1}{m} a > p$

(§. 76.), und man kann m so groß annehmen,

daß die Größen $\frac{n}{m} a$ und $\frac{n+1}{m} a$, zwischen wel-

chen p liegt, so wenig von einander unterschieden sind, als man nur irgend will (§. 78.), folg-

lich

lich können auch die Größen $a + \frac{n}{m} a$ und $a + \frac{n+1}{m} a$, zwischen welchen $a + p$ d. i. α liegt, von einander so wenig unterschieden seyn, als man nur will. Nun aber ist $a + \frac{n}{m} a = \frac{m+n}{m} a$, und $a + \frac{n+1}{m} a = \frac{m+n+1}{m} a$, folglich geben die beiden Größen $a + \frac{n}{m} a$ und $a + \frac{n+1}{m} a$ die Theile $\frac{m+n}{m} b$ und $\frac{m+n+1}{m} b$ d. i. $b + \frac{n}{m} b$ und $b + \frac{n+1}{m} b$, folglich geben beide einen Theil, der größer als b ist. Also muß auch die Größe α, die zwischen ihnen liegt, einen Theil β geben, der größer als b ist.

Ist aber $p < a$; so ist $\frac{m}{n+1} a < p$, und $\frac{m}{n} a > p$ (§. 80.), und man kann hier wieder n so groß annehmen, daß die Größen $\frac{m}{n+1} a$

und

und $\frac{m}{n}a$, zwischen welchen p liegt, von einander so wenig unterschieden sind, als man nur irgend will (§. 81.), folglich können auch die Größen $a + \frac{m}{n+1}a$ und $a + \frac{m}{n}a$, zwischen welchen $a + p$ d. i. α liegt, von einander so wenig unterschieden seyn, als man will. Nun aber geben diese beiden Größen die Theile $\frac{n+1+m}{n+1}b$ und $\frac{n+m}{n}b$ d. i. die Theile $b + \frac{m}{n+1}b$ und $b + \frac{m}{n}b$, folglich geben beide einen Theil, der größer als b ist. Also muß auch wiederum die Größe α, die zwischen ihnen liegt, einen Theil β geben, der größer als b ist.

§. 86.

Wenn eine endliche Größe A mit irgend einer andern Größe B in solcher Verbindung steht, daß jeder Theil a, den man in A annimmt, einen gewissen Theil b in B giebt, und zwar so, daß ma allemal mb giebt, so ist, wenn der Theil α in A den Theil β in B giebt, allemal $a:\alpha = b:\beta$, das Verhältniß $a:\alpha$ mag rational oder irrational seyn.

Denn

Denn man setze erstlich, das Verhältniß $a:\alpha$ sey rational, z. B. $a:\alpha = m:n$; so ist $\alpha = \frac{n}{m}a$. Nun giebt a den Theil b, und ma den Theil mb (p. hyp.), folglich $\frac{n}{m}a$ den Theil $\frac{n}{m}b$ (§. 84.) d. i. α giebt $\frac{n}{m}b$. Nun aber giebt α den Theil β (p. hyp.), folglich ist $\beta = \frac{n}{m}b$. Da nun $a:\frac{n}{m}a = b:\frac{n}{m}b$ ist; so ist $a:\alpha = b:\beta$.

Man setze zweitens, das Verhältniß $a:\alpha$ sey irrational; so ist entweder $\alpha > a$, oder $\alpha < a$.

Ist $\alpha > a$; so ist $\frac{n}{m}a < \alpha$ und $\frac{n+1}{m}a > a$ (§. 76.), folglich giebt $\frac{n}{m}a$ einen Theil, der kleiner als β, und $\frac{n+1}{m}a$ einen Theil, der größer als β ist (§. 85.) Nun aber giebt $\frac{n}{m}a$ den Theil $\frac{n}{m}b$ und $\frac{n+1}{m}a$ den Theil $\frac{n+1}{m}b$ (§. 84.),

(§. 84.), folglich ist auch $\frac{n}{m}b < \beta$ und $\frac{n+1}{m}b > \beta$. Also ist auch hier $a:\alpha = b:\beta$ (§. 83.).

Ist aber $\alpha < a$; so ist $\frac{m}{n+1}a < \alpha$ und $\frac{m}{n}a > \alpha$ (§. 80.), folglich giebt $\frac{m}{n+1}a$ einen Theil, der kleiner, und $\frac{m}{n}a$ einen Theil, der grösser als β ist (§. 85.). Nun aber giebt $\frac{m}{n+1}a$ den Theil $\frac{m}{n+1}b$, und $\frac{m}{n}a$ den Theil $\frac{m}{n}b$ (§. 84.), folglich ist auch $\frac{m}{n+1}b < \beta$, und $\frac{m}{n}b > \beta$. Also ist auch hier $a:\alpha = b:\beta$ (§. 83.).

§. 87.

Dieser letzte Satz enthält nun das allgemeine Criterium der Proportionalität, das sowol für die Geometrie, als für die ganze Mathematik ungemein bequem ist. Es ist bekannt, wie viel Weitläuftigkeit es jedesmal macht, so oft man die Proportionalität zwischen zween Theilen einer

Grösse

Größe und den ihnen correspondirenden Theilen einer andern, z. B. die Proportionalität der Kreisbogen und der ihnen zugehörigen Centriwinkel u. s. w., gründlich und in solcher Allgemeinheit beweisen soll, daß man von der Gewißheit derselben auch in dem Falle überzeugt seyn kann, wenn das Verhältniß zweener solcher Theile irrational ist. Allein, vermöge des §. 86. erwiesenen Satzes kann man in allen Fällen unmittelbar schließen, daß ganz allgemein $a:\alpha = b:\beta$ ist, das Verhältniß $a:\alpha$ mag rational oder irrational seyn, so bald nur bewiesen worden, daß, wenn man $\alpha = na$ setzt, auch allemal $\beta = nb$ sey. So bald man z. B. aus dem Satze, daß im Kreise gleiche Centriwinkel gleiche Bogen geben, gefolgert hat, daß ein n mal größerer Winkel einen n mal größern Bogen giebt, so kann man nun hieraus so fort in der größesten Allgemeinheit schließen, daß die Kreisbogen den Centriwinkeln proportional seyn. Und so kann man in der ganzen Geometrie aufs strengste verfahren, ohne sie im geringsten durch die besondere Rücksicht auf Irrationalverhältnisse zu erschweren. In der Arithmetik und angewandten Mathesis ist man bisher auch wirklich ohne alle weitere Umschweife auf diese Art zu Werk gegangen. Wenn z. B. n mal mehr Waare n mal mehr gilt, und n mal mehr Bley n mal mehr wiegt; so schließt man unmittelbar, daß die Preise den Waaren, und die Gewichte den Quantitäten des

Bleys proportional sind. Diese Betrachtung, nebst der, daß der Satz §. 83. sich jedesmal sicher anwenden ließ, so bald man nur wußte, daß na allemal nb giebt, war es eben, die mich veranlaßte, den Beweis einer Sache aufzusuchen, die der gemeine Verstand schon als richtig voraussetzt. Es war also bloß nöthig, zu dem schon bekannten Satze §. 83., den man jedesmal anwenden mußte, wenn man die Proportionalität zweyer Irrationalverhältnisse beweisen wollte, noch die drey folgenden §. 84 - 86. hinzu zu fügen, deren Beweise demjenigen Anfänger, der schon den Beweis des Satzes §. 83. gefaßt hat, gewiß noch weniger Beschwerde machen werden. Allein, man hat nicht einmal nöthig, den Beweis auf eine so mühsame und abstracte Art zu führen; sondern man kann noch weit kürzer und einleuchtender, und dabei meiner Meinung nach eben so gründlich zum Zwecke kommen, wenn man den Exponenten eines Irrationalverhältnisses als einen Bruch betrachtet, bei welchem Nenner und Zähler ohne Ende wachsen. Ich würde daher auch diesen leichten Weg gewählt haben. Allein, da Hr. Hofrath Karsten auch wider den kleinsten Gebrauch des Unendlichen in der gemeinen Mathematik so außerordentlich eifert, so habe ich, um alle etwanige Vorwürfe zu verhüten, lieber den Satz §. 83. nach seiner eigenen Methode erweisen, und zeigen wollen, wie sich eben aus demselben das viel bequе-

quemere Criterium der Proportionalität (§. 86.) herleiten läßt. Indessen wird es vielleicht manchem meiner Leser nicht unangenehm seyn, wenn ich auch den erwähnten kürzern Beweis desselben hier noch beifüge. Die Art, wie ich hier verfahre, ist folgende.

§. 88.

Man betrachtet die Größen a, α im geometrischen Verhältnisse, wenn man untersucht, wievielmal α in a enthalten ist, d. i. wenn man auf die Zahl sieht, durch welche α multiplicirt werden muß, wenn a entstehen soll, und diese Zahl nennt man den **Exponenten** des Verhältnisses a : α. Nun ist eine Zahl nichts anders als die Bestimmung, wievielmal man entweder die **Einheit** oder das **Maaß** selbst, oder einen aliquoten Theil von ihr nehmen soll. Im erstern Falle heißt sie eine ganze Zahl, im letztern ein **Bruch**. Also ist jede mögliche Zahl entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch. Da sich nun jede ganze Zahl gleichfalls durch einen Bruch ausdrucken läßt; so läßt sich jede mögliche Zahl durch einen Bruch ausdrucken. Also gilt dieses auch von jedem möglichen Exponenten. Nun aber läßt sich der **Exponent** eines Irrationalverhältnisses durch einen Bruch, dessen Nenner und Zähler endlich sind, zwar immer genauer ausdrucken, je größer man den Nenner annimmt, aber doch niemals ganz genau, so lange Nenner

und Zähler endlich sind. Mithin muß derselbe ein Bruch seyn, dessen Nenner und Zähler unendlich groß sind. Also läßt sich der Exponent eines jeden Verhältnisses, es sey rational oder irrational, durch einen Bruch $\frac{n}{m}$ ausdrucken, in welchem Nenner und Zähler entweder endlich, oder unendlich groß sind. Dieses vorausgesetzt, beweise ich nun das obige Kennzeichen der Proportionalität §. 86. unmittelbar aus dem leichten Satze §. 84. folgendermaaßen.

§. 89.

Wenn eine endliche Größe A mit irgend einer andern Größe B in solcher Verbindung steht, daß jeder Theil a, den man in A annimmt, einen gewissen Theil b in B giebt, und zwar so, daß na allemal nb giebt; so ist, wenn der Theil α in A den Theil β in b giebt, allemal $a:\alpha = b:\beta$, das Verhältniß $a:\alpha$ mag rational, oder irrational seyn. Denn da der Exponent allemal ein Bruch seyn muß (§. 88.); so setze man $a:\alpha = \frac{m}{n}$, alsdenn ist $\alpha = \frac{n}{m} a$. Nun giebt a den Theil b, und ma giebt mb (p. hyp.), folglich giebt $\frac{n}{m} a$ oder α den Theil $\frac{n}{m} b$ (§. 84.). Allein, α giebt den Theil β

(p. hyp.), folglich ist $\beta = \frac{n}{m} b$. Nun aber ist $a : \frac{n}{m} a = b : \frac{n}{m} b$, weil beide Verhältnisse einerley Exponenten $\frac{m}{n}$ haben. Also ist $a : \alpha = b : \beta$.

§. 90.

Wie kurz und leicht dieser Beweis ist, ist klar. Ob er aber etwa weniger bündig und überzeugend, als der §. 86. ist, muß ich dem Urtheil meiner Leser überlassen. Es kommt bei demselben bloß darauf an, ob $\frac{n}{m} a$ nach §. 84. auch in dem Falle $\frac{n}{m} b$ giebt, wenn n und m Zahlen sind, die ohne Ende wachsen. Da aber dieser Satz wahr ist, man mag m und n noch so groß annehmen; so muß er auch wahr seyn, wenn man sie wirklich als ohne Ende wachsend betrachtet. Man setze z. B. $\frac{n}{m} = \sqrt{2} = \frac{1414213 \ldots}{1000000 \ldots}$; so bleibt der Satz §. 84. beständig wahr, wenn auch die Menge der Nullen

im Nenner, und die Menge der Zahlziffern im Zähler ohne Ende fort immer größer wird, er muß also auch wahr bleiben, wenn man beide Mengen in der That als unendlichgroß betrachtet. Die Sache mit andern Worten ausgedruckt, heißt dieses so viel: der Satz §. 84. bleibt immer wahr, der Bruch $\frac{n}{m}$ mag dem wahren Werthe des irrationalen Exponenten so nahe kommen, als man will; also muß er auch wahr bleiben, wenn $\frac{n}{m}$ diesem Werthe wirklich gleichgesetzt wird. Wem indessen dieser zweite Beweis nicht strenge genug scheinen möchte, für den ist durch den erstern §. 86., der gewiß strenge ist, völlig gesorgt.

Zweite Abtheilung.

Anfangsgründe der Meßkunst des Unendlichgroßen.

Einleitung.

§. 1.

Dinge heissen verschieden, so fern in dem einen etwas ist, was in dem andern nicht ist; einerley, so fern sie nicht verschieden sind, d. i. so fern in dem einen nichts ist, was nicht auch im andern wäre. So fern daher Dinge einerley sind, so fern lassen sie sich substituiren, d. i. man kann das eine für das andere setzen; und umgekehrt: so fern Dinge sich substituiren lassen, so fern sind sie einerley. Daher die gewöhnliche Erklärung: eadem sunt, quae substitui possunt.

§. 2.

Die innerlichen Bestimmungen und Merkmale eines Dinges sind Beschaffenheit und Größe. Man kennt nemlich alles, was in einem Dinge ist, wenn man weiß, wie es beschaffen, und wie groß es ist. Dinge, die in Ansehung ihrer

Beschaffenheiten einerley sind, heißen ähnlich. Dinge, die in Ansehung ihrer Größe einerley sind, heißen gleich. Dinge, die gleich und ähnlich zusammen sind, heißen congruent.

§. 3.

Also können ähnliche Dinge bloß in Ansehung ihrer Größe *), gleiche bloß in Ansehung ihrer Beschaffenheiten innerlich verschieden seyn. Congruente Dinge dagegen sind in Ansehung ihrer innerlichen Merkmale und Bestimmungen gar nicht verschieden, sondern an sich vollkommen einerley (§. 2.), und man hat also ganz einerley Begriff, man mag das eine oder das andere denken. So ist mein Begriff ganz derselbe, ich mag von zwey congruenten Kreisen den einen oder den andern denken, denn ich denke in dem einen gar nichts, was ich nicht auch im andern dächte. Da also congruente Dinge innerlich ganz einerley sind; so können sie bloß äußerlich verschieden seyn.

§. 4.

Die äußerlichen Bestimmungen und Merkmale eines Dinges sind sein Ort im Raum, und seine Stelle in der Zeit. Also können congruente Dinge bloß in Ansehung ihrer Oerter im Raum und ihrer Stellen in der Zeit verschieden seyn (§. 3.). Stellt man sich daher zwey oder mehrere congruente

*) Daher Leibnitzens Erklärung der Größe: quantitas est discrimen internum similium.

gruente Dinge auch zugleich in einerley Orte vor, so läßt sich das eine vom andern weder durch innere noch durch äußere Merkmale, mithin auf gar keine Weise unterscheiden, folglich verschwindet hier der Begriff von mehrern Dingen, und man denkt unter ihnen nicht mehr als ein Ding, d. i. ein einziges Ding (eadem *numero*, unicum). So sind z. B. zwey congruente Kreise von gleichen Durchmessern zwar in Ansehung ihrer innern Merkmale ganz einerley, aber so lange ich sie mir an zwey verschiedenen Orten denke, so denke ich sie doch wegen dieser äußern Verschiedenheit noch immer als zwey Kreise. Stelle ich mir aber in eben derselben Ebene den Mittelpunkt des zweiten zugleich da vor, wo der Mittelpunkt des erstern ist, folglich den zweiten Kreis zugleich im Orte des erstern; alsdann denke ich nicht mehr zwey Kreise, sondern nur einen, d. i. einen einzigen. Eben so würden z. B. zwey gleich große Sonnenfinsternisse, bei denen man auch nicht nur in Ansehung ihrer Qualitäten gar nichts Verschiedenes bemerkt hätte, sondern die sich auch in eben demselben Orte der Ecliptik eräugnet hätten, zwar congruent, aber doch wegen der verschiedenen Zeitpunkte, in welchen man sie bemerkt hätte, immer noch zwey Sonnenfinsternisse seyn. Wollte man aber zwey dergleichen Sonnenfinsternisse auch in eben derselben Zeit denken; so dächte man alsdenn nicht mehr zwey, sondern nur eine.

§. 5.

Aehnliche Dinge lassen sich in Ansehung ihrer Beschaffenheiten, gleiche in Ansehung ihrer Größe, congruente in Ansehung beider, mithin völlig substituiren; und umgekehrt: Dinge, die sich in Ansehung ihrer Beschaffenheiten substituiren lassen, sind ähnlich; Dinge, die sich in Ansehung ihrer Größe substituiren lassen, sind gleich, und Dinge, die sich in Ansehung beider, mithin völlig, substituiren lassen, sind congruent (§. 1. 3.)

§. 6.

Wenn zwey ausgedehnte Dinge, die man geometrische Größen nennt, nemlich zwey Linien, oder zwey Flächen, oder zwey körperliche Räume sich völlig substituiren lassen; so sagt man: sie decken einander, oder sie passen auf und in einander.

§. 7.

Also sagt der Ausdruck: geometrische Größen decken einander, so viel: sie sind congruent (§. 5.) d. i. sowol in Ansehung ihrer Qualität als Quantität, mithin in Ansehung aller ihrer innern Merkmale vollkommen einerley, man denkt in der einen nichts, was man nicht auch in der andern dächte, oder der Begriff von der einen ist mit dem Begriffe der andern ganz ein und eben derselbe (§. 3.). Sie können also bloß dem Orte und der Zeitstelle nach verschieden seyn; so bald man

sie aber zu gleicher Zeit an einerley Orte denkt, denkt man sie nicht mehr als zwey, sondern nur als eine (§. 4.).

Hierauf beruht eben der unwidersprechliche achte Euklideische Grundsatz: Dinge, die einander decken, sind einander gleich *). Denn da Dinge, die sich völlig substituiren lassen, beides in Ansehung ihrer Beschaffenheit und Größe einerley, folglich gleich und ähnlich zusammen seyn müssen, so ist der Begriff der Gleichheit schon im Begriffe des Deckens mit enthalten, aber umgekehrt enthält der erstere noch nicht den letztern, weil dieser außer der Gleichheit noch die Aehnlichkeit in sich faßt.

§. 8.

Es ist leicht einzusehen, daß es sehr ungeometrisch seyn würde, wenn man die Ausdrücke des Deckens und auf oder in einander Passens bey geometrischen Linien, Flächen und Körpern im eigentlichen d. i. im physischen Sinne nehmen wollte †); denn, sollten z. B. ein paar gerade Linien,

*) Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐςί.

†) Diese Anmerkung wird vielleicht vielen meiner Leser überflüssig vorkommen, weil es nicht glaublich scheint, daß jemand in der Geometrie, die eine reine Wissenschaft ist, von ihren Objecten sich eine solche physische und empirische Vorstellung machen könnte. Allein wenn selbst ein Karsten (math. Abh. II. §. 72.) sagen kann: „wenn mir offenbar „seyn

nien, oder ein paar ebene Figuren einander im eigentlichen Sinne decken; so müßte man die eine von ihrem Orte wegnehmen, und sie dergestalt auf die andere legen, daß die letztere weder unter der erstern, noch die erstere über der letztern hervorragte. Auf diese Art deckt ein Stab den andern, und eine Marmorplatte die andere. Allein, eine geometrische Linie oder Fläche von ihrer Stelle wegnehmen, und sie auf eine andere legen, ist doppelt ungeometrisch, theils weil sie kein physisches Ding ist, das sich auf eine solche physische Art behandeln läßt, theils weil der Ort einer jeden geometrischen Linie oder Fläche im Raum eben so unveränderlich, als der Raum selbst ist, und wenn man daher auch sagen wollte: man könne die Linie oder Fläche durch Fortschiebung

„seyn soll, daß eine Linie die andere decke; so muß „ich nicht allein beide Anfangspuncte auf einander „legen können, sondern auch wissen, wo ich die „Endpuncte suchen soll, damit ich entweder mit „Augen sehen kann, daß sie auf einander fallen, „wenn die Linien selbst an einander liegen, oder „damit ich mich durch Schlüsse überzeugen kann, „daß es der Erfolg seyn müsse„ — dann dürfte sie doch wol nicht unnöthig seyn. Eben so kann vielleicht manchem diese ganze Einleitung, da sie bloß die allerersten Begriffe, die billig jeder Anfänger wissen sollte, enthält, unnütze Weitschweifigkeit zu seyn scheinen. Allein in der Abhandlung selbst wird es sich zeigen, wie unvermeidlich ich mich entschließen mußte, dieselbe voranzuschicken, so viel Ueberwindung mir auch dieser Entschluß kostete.

bung oder Bewegung aus ihrem Orte in den andern bringen; so streitet dieses doch immer wider die Unveränderlichkeit des Raums, und einer jeden Linie, Fläche oder körperlichen Theils, der in ihm ist, und ist daher bloß was Imaginäres. Sodann aber ist es auch ungeometrisch, im eigentlichen Sinne zu sagen: die eine Linie oder Figur liegt auf der andern; denn da sie in diesem Falle noch zwo verschiedene Linien oder ebene Figuren bleiben müßten, so müßten sie einander parallel seyn, allein zwischen zwo parallelen Linien giebt es noch immer eine Ebene, und zwischen zwo parallelen Ebenen giebt es noch immer einen körperlichen Raum.

Besteht nun aber das Decken der geometrischen Größen nicht in einer physischen oder empirischen Substitution, ja ist es bloß was Imaginäres, eine geometrische Größe auch nur in Gedanken an den Ort einer andern zu versetzen; so ist es wol klar, daß, wenn man sagt: geometrische Linien, Flächen und Körper decken einander, der wahre der Natur der geometrischen Größen angemessene Sinn kein anderer seyn kann, als dieser: der Begriff der einen ist mit dem Begriffe der andern nach allen ihren innerlichen Merkmalen und Bestimmungen so ganz und völlig einerley, daß, wenn ich, vermittelst der Einbildungskraft, die eine dahin versetzen wollte, wo die andere ist, ich dieses so thun könnte, daß ich sie nicht mehr als zwey,

son=

sondern bloß als eine denken, d. i. statt der erstern an ihrem Orte jezt die zweite denken müßte.

§. 9.

Euklides hat den Begriff des Deckens gar nicht erklärt, sondern als schon für sich klar vorausgesetzt. Daß er aber unter dem Decken der geometrischen Dinge nichts anders verstanden habe, als daß sie sich völlig substituiren lassen, folglich innerlich ganz einerley und außer der verschiedenen Zeit, in welcher man sich etwa dieselben vorstellete, durch nichts, als durch den Ort verschieden sind, ist durch seine ganze Geometrie überall klar, wo er seinen achten Grundsatz anwendet. Daß er aber diese mögliche Substitution, wenn er z. B. sagt, man lege oder bringe die eine Linie, oder Fläche auf die andere, für keine physische, sondern bloß imaginäre gehalten, wird ihm jeder Billigdenkende wol von selbst zutrauen. Eben dieser Begriff des Deckens liegt auch in der Erklärung, welche Hr. Hofrath Kästner vom Decken giebt: „Größen, die „dergestalt auf einander können gelegt werden, „daß jeder Grenzen, und alles, was dazwischen „enthalten ist, auf die Grenzen und das dazwischen enthaltene der andern fallen, sind gleich „und ähnlich. Man sagt von ihnen, daß sie „einander decken (congruunt)„. Denn was sagt dieses anders, als: sie lassen sich durch die

Ima=

Imagination völlig substituiren, und sind daher, so lange man sie noch zugleich als mehrere betrachtet, durch nichts, als den Ort, in welchem man sich dieselben vorstellt, verschieden. Daß aber der erste Geometer Deutschlands seine Erklärung nur auf völlig begrenzte Größen einschränkt, dieses war wol höchst zweckmäßig, da sowol seine Geometrie, als die des Euklides bloß diese zum Gegenstande haben *).

§. 10.

Wenn man die Gleichheit und Aehnlichkeit zweyer geometrischen Größen aus dem Grundsatze: Dinge, die einander decken, sind einander gleich, herleitet; so setzt man jedesmal bei ihnen gewisse congruente Dinge als Bedingungen voraus, und zeigt hernach, daß, weil diese, durch ein imaginäres Auflegen auf einander, einander decken, auch die beiden Größen selbst und alles übrige in ihnen nach der Ordnung einander decken müssen. Soll aber dieses folgen, so setzt dieses schon voraus, daß durch die angenommenen Bedingungen, in welchen Ort des Raums man sie immer setzen mag, die Größe selbst und alles übrige in ihr gegeben sey. Denn, ist unter denselben

*) Die Consequenz, welche Hr. Hofrath Karsten aus derselben macht, daß daher der Begriff des Deckens bloß bei endlichen Größen Statt finde, ist also wol etwas voreilig. Ihr Ungrund aber wird sich im Folgenden zeigen.

selben an irgend einem Orte mehr als eine Größe von der Art möglich; so läßt sich daraus, daß diese Bedingungen in zwo Größen von eben der Art einander decken, niemals folgern, daß die Größen mit allem übrigen in ihnen selbst einander decken. So wird z. B. durch zwo Seiten eines Dreyecks und einen nicht eingeschlossenen spitzen Winkel, wo man sie auch im Raum irgend annehmen mag, das Dreyeck nicht gegeben; daher kann man auch schlechterdings nicht folgern, daß zwey Dreyecke, in welchen diese drey Stücke congruiren, deßhalb selbst congruiren. Ist dagegen durch gewisse Stücke einer Größe, wo man sie irgend annehmen mag, die Größe selbst und alles übrige in ihr gegeben, d. i. ist in keiner angenommenen Lage jener Stücke mehr als eine Größe von derselben Art möglich; so ist hieraus in jedem möglichen Falle unmittelbar einleuchtend, daß zwo Größen von eben der Art, in welchen jene Stücke congruiren, selbst congruiren müssen. Denn, wenn man hier durch die Imagination die gegebenen Stücke der zweiten Größe völlig in die Stelle der gegebenen Stücke der erstern setzen kann, in dieser Stelle aber außer dieser gar keine andere Größe von eben der Art mehr möglich ist, so ist offenbar, daß dadurch die ganze zweite Größe mit allem übrigen, was in ihr ist, jetzt die Stelle der erstern einnehmen d. i. dieselbe decken muß. Wenn z. B. Euklides erst im 7ten Satze bewiesen hat, daß

über

über einer gegebenen Grundlinie AB, wenn die andern beiden Seiten AC, BC gleichfalls gegeben sind, nicht mehr als ein Dreyeck ACB möglich ist, so folgt hieraus sein 8ter Satz, daß also zwey Dreyecke, in welchen die drey Seiten des einen die drey Seiten des andern decken, einander mit ihren Winkeln nach der Ordnung selbst decken, ohne weitere Umstände von selbst. Auf eben diese Art, wie Euklides bei diesem Satze verfährt, kann man also, wenn man will, in allen übrigen Sätzen der Geometrie, wo man die Congruenz der Größen beweisen soll, verfahren, und die ganze Geometrie als eine reine Wissenschaft, in der nichts empirisch ist, ihrer wahren Würde gemäß so behandeln, daß selbst das imaginäre Auflegen der Größen auf einander, das den Anfänger so leicht verführt, die ganze Wissenschaft für bloße Empirie zu halten, nicht einmal nöthig ist. Um dieses ins Licht zu setzen, wird es genug seyn, einige wenige Beispiele anzuführen. So ist durch zwo Seiten eines Dreyecks und den eingeschlossenen Winkel das Dreyeck selbst mit allem übrigen gegeben, weil von dem Endpunkte der einen Seite zum andern nur eine gerade Linie möglich ist. Also ist hieraus unmittelbar einleuchtend, daß Dreyecke, in welchen jene drey Stücke congruiren, selbst congruiren. Auf einer Seite und den beiden Winkeln, an welchen sie liegt, ist nur ein Dreyeck möglich, weil die beiden andern Schenkel, deren Lage

durch die Winkel gegeben ist, einander nur in einem Punkte schneiden können; also folgt hieraus unmittelbar, daß Dreyecke, in welchen eine Seite mit den anliegenden Winkeln congruiren, selbst congruiren. Und so lassen sich demnach alle drey allgemeine Sätze von der Congruenz der Dreyecke nach eben der Methode beweisen, wie Euklides den einen von ihnen in seinem achten Satze bewiesen. Um einen Mittelpunkt, den man in einer Ebene annimmt, ist für den gegebenen Halbmesser nicht mehr als ein Kreis möglich, weil alle Punkte der Peripherie eines zweiten in der Peripherie des ersten liegen würden; also folgt hieraus unmittelbar, daß Kreise von congruenten Halbmessern selbst congruiren. Auf der gegebenen Grundfläche eines Kegels ist, wenn seine Axe und ihre Neigung gegen die Grundfläche gegeben ist, nicht mehr als ein Kegel möglich, weil aus dem Endpunkte der Axe nach jedem Punkte der Peripherie der Grundfläche nur eine gerade Linie möglich ist; also folgt hieraus unmittelbar, daß Kegel, in welchen jene drey Stücke congruiren, selbst congruiren. Diese wenigen Beispiele werden hinreichend seyn, einzusehen, wie man in jedem Falle aus der Congruenz gewisser Stücke in zwo Größen auf ihre Congruenz selbst unmittelbar schließen kann, wenn man vorher erwiesen, daß durch jene Stücke in jeder Lage, wo man sie annimmt, die Größen selbst gegeben werden.

§. 11.

§. 11.

Die Meßkunst oder Geometrie des Unendlichgroßen heißt derjenige Theil der Geometrie, der die Ausmessung der unendlichgroßen Linien, Flächen und körperlichen Räume zum Gegenstande hat.

§. 12.

Die Meßkunst des Unendlichgroßen läßt sich daher eben so wie die Geometrie des Endlichen in die gemeine und höhere eintheilen. Die erstere hat bloß die unendlichen geraden Linien, und diejenigen Flächen und körperlichen Räume zum Gegenstande, auf welche sich die Elementargeometrie einschränkt, die letztere aber untersucht alle unendlichgroße krumme Linien nebst denjenigen Flächen und körperlichen Räumen, die zu den Objecten der höhern Geometrie gehören.

 Der

Der Meßkunst des Unendlichgroßen
Erster Abschnitt.
Anfangsgründe der gemeinen Meßkunst des Unendlichgroßen.

I.
Von den unendlichgroßen geraden Linien.

§. 13.

Ein endlichvielter Theil einer von K aus nur nach einer Seite B ohne Ende fortgehenden geraden Linie KB (Fig. 4.) ist ein Unding.

Denn da KB unendlichgroß ist (p. hyp.); so müßte auch der Theil $\frac{1}{n}$ KB unendlichgroß seyn (1. Abth. §. 11.). Nun aber heißt eine Linie theilen, nichts anders, als die gemeinschaftlichen Grenzen jeder zwey nächstfolgenden Theile d. i. die Punkte bestimmen, wo der erste Theil aufhört und der zweite anfängt, wo der zweite aufhört und der dritte anfängt u. s. w. Also müßte der nte Theil von KB einen Endpunkt haben, wo er aufhörete, und sein Nebentheil anfienge. Nun aber hat er auch einen Anfangs-

punkt K, folglich wäre er völlig begrenzt, mithin endlich (1. Abth. §. 1.). Da nun dieses dem Vorigen widerspricht, so ist er ein Unding.

§. 14.

Kein Theil einer von K aus nur nach einer Seite B ohne Ende fortgehenden geraden Linie KB kann gegen dieselbe in einem Verhältnisse ungleicher endlicher Größen $= a : b$ stehen.

Denn man setze jeden Theil der unendlichen Linie $KB = x$. Sind nun a, b endliche ungleiche Größen; so ist $a < b$, und ihr Verhältniß entweder rational, oder irrational.

Man setze also erstlich, es sey rational, so daß $a : b = m : n$, folglich $m < n$, also $n > 1$ ist; so ist, wenn $x : KB = a : b$ ist, $x : KB = m : n$, also $x = m \cdot \frac{KB}{n}$. Nun aber ist $\frac{KB}{n}$ ein Unding (§. 13.), folglich auch $m \cdot \frac{KB}{n}$, also auch der Theil x ein Unding.

Gesetzt aber, das Verhältniß $a : b$ wäre irrational; so liegt, weil $a < b$ ist, allemal a zwischen $\frac{m}{n} b$ und $\frac{m}{n-1} b$ (1. Abth. §. 80.), folglich auch x zwischen $\frac{m}{n} KB$ und $\frac{m}{n-1} KB$,

d. i. zwischen zwo unmöglichen Größen (p. demonstr.). Also ist x auch in diesem Falle ein Unding.

§. 15.

Von dem Punkte A ist durch den Punkt B (Fig. 2.) ohne Ende fort nicht mehr als eine gerade Linie AD möglich, d. i. durch die Punkte A und B ist die unendliche gerade Linie AD gegeben.

Dieser Grundsatz sagt bloß mit andern Worten eben das, als der: daß, wenn man AB durch B verlängert, nur die einzige Verlängerung BD möglich sey. Denn, wäre durch A und B außer der unendlichen geraden Linie AD noch eine zweite möglich; so müßte diese von jener entweder schon in B, oder doch irgend weiterhin in E abweichen, folglich müßte diese zweite unendliche gerade Linie entweder ABG, oder AEH seyn, folglich wären von AB zwo verschiedene Verlängerungen möglich, nemlich im erstern Falle die beiden BD, BG, im letztern die beiden BED und BEH. Wären aber von AB zwo verschiedene Verlängerungen möglich; so wäre das zweite Postulat des Euklides in der Geometrie gänzlich unbrauchbar; denn, wenn man auch eine gegebene gerade Linie verlängert hätte, so wüßte man doch niemals, ob die angenommene Verlängerung die rechte wäre, oder ob man nicht vielmehr die zweite gleichfalls mögliche

liche nehmen müßte, oder ob nicht gar beide zugleich stattfinden könnten, und so wäre es um die ganze Elementargeometrie des Euklides geschehen.

§. 16.

Alle unendliche gerade Linien KA, KC, KB, KD u. s. w. (Fig. 4.), die einerley Punkt K zum Anfangspunkte haben, sind einander gleich und ähnlich.

Denn, man mache KM = KN = KO = KL, und bringe in der Imagination die unendliche Linie KA über KB; so fällt M in L. Da nun durch K und L nur eine unendliche gerade Linie KB möglich ist (§. 15.); so fällt die ganze unendliche Linie KA in die unendliche KB, folglich lassen sich beide völlig substituiren, also decken sie einander (§. 6.), d. i. sie sind einander gleich und ähnlich (§. 7.). Bringt man die unendliche Linie KC oder KD über KB; so folgt, weil alsdenn N und O in L fallen, auf eben diese Art, daß auch die unendlichen geraden Linien KC, KD mit KB gleich und ähnlich sind.

§. 17.

Obgleich die Richtigkeit dieses Satzes so unmittelbar einleuchtend ist, daß man kaum vermuthen sollte, daß jemand dieselbe im Ernst bezweifeln könnte; so hat derselbe doch gleichfalls Widerspruch gefunden. Herr Hofrath Karsten bestreitet denselben, außer den oben bereits zur

Gnüge widerlegten Sätzen: unendliche Größen lassen sich gar nicht vergleichen, sie können weder gleich noch ungleich seyn, noch damit, daß er in der schon in der Anmerkung zu §. 8. angeführten Stelle auch schlechthin sagt: unendliche Linien können einander gar nicht decken, weil, wenn ihm offenbar seyn solle, daß eine Linie die andere decke, er es entweder mit Augen sehen, oder sich durch Schlüsse müsse überzeugen können; daß beides ihre Anfangs- und Endpunkte auf einander fallen, wenn die Linien selbst an einander liegen. Daher tadelt er mich auch (math. Abh. II. S. 172. 173.), daß ich von anschaulicher Darstellung der Winkelflächen rede, und doch nur fordern könne, man solle sich die Schenkel KC, KB (Fig. 4.) ohne Ende verlängert vorstellen. Nun findet ein solches physisches Darstellen und Decken, das man gar mit Augen sehen müßte, hier freilich nicht Statt; aber ein solches ist auch bei endlichen Größen höchst ungeometrisch (§. 8.). Geometrische Linien mit Augen sehen, sehen, wie sie zwischen ihren Endpunkten auf einander liegen — dazu sind meine Augen zu stumpf. Daß aber sogar die Gewißheit der geometrischen Wahrheiten, zu einem wahren Unglück für jeden Blinden, von unserm Gesichte abhange, das, muß ich bekennen, habe ich nie gewußt. Obgleich indessen das Decken der unendlichen geraden Linien KC, KB nicht durchs Auge bemerkt werden kann; so hätte sich

Hr.

Hr. Karsten doch auf seinem zweiten Wege, nemlich durch einen sehr leichten Schluß überzeugen können, daß die beiden Linien eben darum, weil sie beide keinen Endpunkt haben, einander nothwendig decken müssen. Denn, wenn KN auf KL und N in L liegt; so liegt die Verlängerung NC auf LB, folglich KC auf KB. Nun setze man, KC deckte KB nicht ohne Ende fort, so müßte das Decken in irgend einem Punkte aufhören, also müßte wenigstens eine von ihnen einen Endpunkt haben, d. i. nicht unendlich seyn, wodurch man sich aber selbst widerspräche.

Herr M. Eichler hat in einer den 21sten October 1786. zu Leipzig gehaltenen Disputation: de Theoria Parallelarum Schulziana, wider diesen Satz drey andere Erinnerungen gemacht. Zuerst meynt er S. 15., es stehe in unserer Willkühr, uns die unendlichen Schenkel KC, KB, ungeachtet ihrer Unendlichkeit, so ungleich vorzustellen, als wir nur wollen, weil ja das Verhältniß zweyer veränderlichen Größen x, y ein beständiges = a : b seyn könne, wie z. B. die in einem rechtwinklichten Dreyecke einem Winkel von 30° gegenüberstehende Seite immerfort die Hälfte der Hypotenuse bleibt, so groß man auch sie und die Hypotenuse annehmen mag, folglich dasselbe Verhältniß a : b, oder 1 : 2 auch bleiben müsse, wenn man x, y oder jene Seite und die Hypotenuse unendlichgroß setzt. Allein, ob ich gleich oben bereits selbst gezeigt habe, daß

auch unendliche Größen allerdings im Verhältnisse der Ungleichheit stehen können, und bald erwiesen werden soll, daß dieses auch gewissermaaßen bei unendlichen Linien Statt habe; so ist doch zugleich schon §. 14. erwiesen worden, daß kein Theil einer unendlichen Linie KB gegen sie selbst im Verhältnisse zweyer ungleichen endlichen Größen = a : b stehen kann. Gesetzt nun, wir wollten uns die unendliche Linie KC kleiner, als KB vorstellen, so daß KC : KB = a : b wäre; so müßten diese beiden unendlichen Linien doch natürlich dieses Verhältniß auch behalten, wenn man KC auf KB legte, mithin würde hier KC ein solcher Theil von KB seyn, der gegen KB im Verhältnisse zweyer ungleichen endlichen Größen = a : b stünde, also wäre hier KC ein Unding (§. 14.), folglich müßte sie auch schon vorhin ein Unding gewesen seyn. Also ist klar, daß zwo unendliche gerade Linien KC, KB, die nur nach einer Seite hin unendlich sind, niemals sich so verhalten können, wie zwo ungleiche endliche Größen a, b. Gesetzt daher, die Analysis führte bei ihnen auf dergleichen Verhältnisse; so zeigt sie eben dadurch an, daß dergleichen Fälle schlechterdings unmöglich sind, gerade so, wie z. B. wenn bei der Aufgabe, die Zahl 12 in solche zwey Theile zu theilen, daß ihr Product 40 betrage, der Calcul für die beiden Theile $6 \pm \sqrt{-4}$ giebt, derselbe eben dadurch an-

zeigt,

zeigt, daß beide Theile Undinge sind. Denn eine unendliche KC, die halb so groß als die unendliche KB, ist eben so ein Ding, als $\sqrt{-4}$. In dem Beispiele vom Dreyeck, das Hr. Eichler anführt, ist dieses besonders sichtbar, indem ein Dreyeck, das eine unendlichgroße Seite hat, ein vollkommenes Unding ist (1. Abth. §. 9. n. 3.)

Zweitens meynt Hr. Eichler l. c. pag. 16., die Congruenz der unendlichen geraden Linien KC, KB wäre deshalb unerweislich, weil man fingiren könnte, sie wären beide aus der Bewegung eines Punkts entstanden, die in Bildung der einen Linie geschwinder, als in Bildung der andern wäre. Allein, wie widersprechend auch diese Vorstellung ist, die so viele täuscht, läßt sich leicht zeigen. Denn, wenn man sich fingirt, der Punkt, der KB beschreibt, bewege sich geschwinder, als der, welcher KC beschreibt, und diese Geschwindigkeiten verhalten sich wie a : b; so stellt man sich wieder die beiden Linien als Functionen von einander vor, so daß jedwede zween correspondirende Theile derselben im beständigen Verhältnisse a : b wären, und so denkt man sich dieselben wieder eben so, wie im vorigen Einwurfe, d. i., wie gezeigt worden, als Undinge. Wollte man sich aber etwa einbilden, man könne sich ganz willkührlich und unbedingt die unendliche Linie KB durch eine geschwindere Bewegung des Punkts, als KC erzeugt, vorstellen, ohne daß man nöthig hätte, diese Linien

als

als Functionen von einander anzusehen, so wäre man aus eben dem Grunde befugt, überhaupt jede unendliche gerade Linie KB auch an sich als eine solche anzusehen, die sowol durch schnellere als langsamere Bewegung eines Punktes erzeugt würde, und so würde eben dieselbe unendliche KB, die doch nur eine ist (§. 15.) und deren Grösse also auch nur eine seyn kann, nach Hr. Eichlers Schluß von verschiedener Grösse seyn können, d. i. sich selber nicht gleich seyn dürfen. Endlich frage ich: was will das sagen, wenn man sich vorstellt, der Punkt, der KC beschreibt, bewege sich langsamer, als der, welcher KB beschreibt? Da beide Linien unendlichgroß angenommen werden, so ist offenbar, daß er beide Linien niemals d. i. in keiner endlichen Zeit beschreiben kann, also gehört dazu eine künftige unendliche Zeit. Nun aber ist diese nur eine (1. Abth. §. 33.), folglich stellt man sich zugleich vor, daß beide unendliche Linien in einerley Zeit beschrieben werden. Hier deckt sich nun schon das erste Blendwerk auf, das so viele täuscht, welche meynen, der Punkt, der sich nur halb so geschwinde bewegt, beschreibe seine unendliche Linie noch einmal so spät, d. i. es giebt für die Zukunft noch zwo gleiche unendliche Zeiten, und wenn beide Punkte sich die erste hindurch bewegt haben, so hat der geschwindere seine unendliche Linie schon beschrieben, der langsamere aber nur ihre Hälfte, also muß er, um die zweite Hälfte der-

derselben zu beschreiben, noch erst die ganze zweite unendliche Zeit absolviren. Ist dieses nun wahre Sprache, sey es übrigens mathematische oder philosophische; so habe ich freilich nichts weiter dawider zu sagen. Muß man dagegen, da ausgemacht nur eine künftige unendliche Zeit möglich ist, bei jener Fiction nothwendig annehmen, daß der langsamere Punkt seine unendliche Linie KC in eben der Zeit beschreiben müßte, als der zweymal geschwindere die unendliche KB; so wird, wenn der erstere in jedem Zeittheile t von KC einen Theil beschreibt, der so groß ist als KN, der zweite in demselben Zeittheile t von KB immerfort einen Theil beschreiben, der $= 2KN$ ist, folglich wird

$$KC = KN + KN + KN + KN + \ldots \sim,$$

und

$$KB = 2KN + 2KN + 2KN + 2KN + \ldots \sim.$$

Hieraus entsteht nun freilich das zweite Blendwerk, daß also $KB = 2KC$ zu seyn scheint. Allein, dieses habe ich bereits in der ersten Abtheilung §. 37. 48. in seiner ganzen Täuschung aufgedeckt.

Drittens, weil aus $KA = KB$ folgt, daß auch $LA = LB$, $MA = MB$ u. s. w., mithin die Mitte der ganzen nach beiden Seiten A, B unendlichen Linie AB nicht nur in K, sondern auch in jedem andern Punkte L, M u. s. w., folglich überall sey; so schließt Hr. Eichler l. c. pag. 18.

pag. 18. sie sey nirgends. „*Ubicunque* esse „dicitur punctum illud medium. *Nusquam* „autem est, quod *ubicunque* est.„ Um dieses kurze und sinnreiche Sophism wenigstens eben so kurz zu entblößen, frage ich: wo ist in der Oberfläche der Kugel derjenige Punkt, dessen Distanz vom Mittelpunkte der Kugel ihrem Halbmesser gleich ist, oder wo ist in ihr der Punkt, durch welchen sie sich halbiren läßt? Natürlich wird Hr. Eichler doch sagen: überall in der ganzen Kugelfläche. Also ist derselbe nach seinem eigenen Gemeinsatz nirgends. Hr. Eichler wird also jetzt wol selbst den Fehler seines Schlusses wahrnehmen.

§. 18.

Alle Bemühungen, den Satz, daß alle unendliche gerade Linien, die von einerley Punkt an nur nach einer Seite ohne Ende fortgehen, gleich und ähnlich sind, zweifelhaft zu machen, sind also unnütz und fruchtlos. Vielmehr wird die apodiktische Gewißheit desselben immer heller, je gründlicher man über denselben nachdenkt. Um dieses vor Augen zu legen, und dadurch zugleich allen weitern unnützen auf bloßem Mißverstand beruhenden Zweifeln vorzubauen, will ich noch zeigen, wie die §. 16. unumstößlich bewiesene Gewißheit desselben auch von allen übrigen Seiten klar ist.

Ich habe schon §. 17. bei Gelegenheit des ersten Eichlerschen Einwurfs erwiesen, daß die unendlichen Linien KC, KB (Fig. 4.) in keinem endlichen Verhältnisse der Ungleichheit a : b stehen können. Sollten sie daher ungleich, und z. B. KC < KB seyn, so müßte KC gegen KB unendlich klein seyn, also müßte entweder KC : KB $= n : \infty = 0 : 1$, oder, wenn $\frac{r}{s} < \frac{m}{n}$ ist, $KC : KB = \infty^{\frac{r}{s}} : \infty^{\frac{m}{n}} = 1 : \infty^{\frac{m}{n} - \frac{r}{s}} = 0 : 1$ seyn. Nun aber nehme man irgend eine endliche Linie KN an; so ist auch KN : KB $= 1 : \infty = 0 : 1$ (1. Abth. §. 14.), folglich wäre KC = KN, also KC endlich. Also ist es schlechterdings ungereimt, KC, KB für ungleich zu halten, folglich sind sie nothwendig einander gleich.

Zweitens stelle man sich vor, der Theil KN werde sowol auf die Linie KC als KB immerfort aufgetragen; so muß dieses, wenn beide Linien unendlich sind, in beiden ohne Ende fort, mithin ∞ mal, folglich in der einen eben so viel mal, als in der andern geschehen können, also ist sowol KC als KB = KN + KN + KN + KN + ... $\sim$, folglich beide gleich. Wollte hier jemand sagen, man könne auf KC auch eben sowol nur $\frac{1}{n}$KN, ∞ mal auftragen, so wird er doch nicht leugnen kön-

können, daß man in diesem Falle auf KB ebenfalls statt KN nur $\frac{1}{n}$ KN, ∞ mal auftragen könne, und so werden KC, KB wieder gleich seyn. Wollte er aber sagen: das Verhältniß ihrer Gleichheit oder Ungleichheit hange lediglich von dem beständigen Gesetz ab, nach welchem man beide wachsen und unendlich werden lasse, dieses Gesetz könne aber auch ein Verhältniß der Ungleichheit seyn; so wird er doch nun endlich einsehen müssen, daß er sich selbst zum Besten hat, indem er sich vorstellt, die unendlichen Linien KC, KB, deren jede doch nur eine ist, und daher auch nur eine unveränderliche Größe hat, können gleichwol durch eine Schöpfung seiner Phantasie bald gleich bald ungleich werden.

Drittens würde doch, wenn jemand die Gleichheit der unendlichen Linien KC, KB leugnen wollte, daraus unmittelbar und unleugbar folgen, daß der unendliche Raum nach der Richtung der einen Linie weiter fortgehen müßte, als nach der Richtung der andern. Aus dem Begriffe des unendlichen Raums selbst aber läßt sich dieses gar nicht erkennen, sondern dieser schließt vielmehr in sich, daß derselbe nach allen möglichen Seiten ohne Ende, d. i. gleichweit fortgeht; folglich hat der Behaupter der Gleichheit jener Linien den unmittelbaren Begriff des Raums auf seiner Seite, und daher seinen Beweis nach

aller

aller Strenge geführt, oder, nach der Strenge zu reden, nicht einmal nöthig gehabt, einen zu führen, indem er seinen Satz schon als ein Axiom annehmen könnte, das aus dem Begriff des unendlichen Raums unmittelbar folgt. Also liegt es dem Leugner, wenn er anders nicht ohne alle Vernunft leugnen will, schlechterdings ob, diejenigen Richtungen anzuzeigen, nach welchen der Raum vom Punkte K an weiter, und nach welchen er von K an nicht so weit fortgeht. Denn, kann er diese nicht anzeigen, so ist sein Leugnen eben so vernunftmäßig, als wenn jemand leugnen wollte, daß von einem Punkt zum andern nur eine gerade Linie möglich sey, ohne doch die zweite mögliche anzeigen zu können. Aber dieses zu zeigen, wird doch wol keiner übernehmen wollen.

Viertens frage ich: worin sind die unendlichen Linien KC, KB, ihren Ort ausgenommen, von einander verschieden? d. i. was denke ich bei der einen, das ich bei der andern nicht denke? Ich denke KB als gerade, aber so denke ich KC gleichfalls, und mein Begriff vom Geraden ist auch in beiden ganz eben derselbe. Ferner denke ich KB von K an nur nach einer Seite fortgehend, und eben so denke ich auch KC, und mein Begriff vom nur nach einer Seite Fortgehen ist hier wieder in beiden Linien ganz eben derselbe. Endlich denke ich KB vom Punkte K ohne Ende fortgehend, und eben so denke ich auch wiederum

KC, und mein Begriff vom ohne Ende Fortgehen ist hier wieder in beiden Linien ganz eben derselbe. Mehrere innere Merkmale, als diese drey, kenne ich in beiden Linien so wenig, daß ich noch ein viertes mögliches selbst durch die größeste Anstrengung der Phantasie mir nicht einmal erdichten kann. Also ist mein Begriff von beiden unendlichen Linien nach allen ihren innern Merkmalen ganz einerley, so daß, wenn ich sie mir auch zugleich in einerley Orte imaginiren wollte, ich sie demnach nicht mehr unterscheiden, und sie daher nicht mehr als zwey Linien, sondern nur als eine einzige denken würde. Und das heißt doch wol: sie lassen sich völlig substituiren, d. i. sie congruiren, sie decken einander, sie sind einander gleich und ähnlich, wofern nicht der ganze Begriff von Congruenz und Decken Unsinn seyn soll (§. 6 - 8.)? Wer also, durch welche Künsteleyen es immer geschehen mag, die Congruenz der unendlichen Linien KC, KB zweifelhaft machen will, der muß erst anzeigen, was er, die Verschiedenheit der Oerter ausgenommen, in KC denkt, das er in KB nicht gleichfalls dächte, d. i. durch was für ein inneres Merkmal sich sein Begriff der einen unendlichen Linie vom Begriffe der andern unterscheidet. Kann er dieses nicht, so ist sein Widerspruch Satyre auf sich selbst, und daß er es nicht kann, setze ich eben so zuversichtlich voraus, als Euklides in seinem 12ten Axiom voraussetzt, daß sich niemand einen

von zwo geraden Linien eingeschlossenen Raum vorstellen kann.

§. 19.

Jede gerade Linie KB (Fig. 4.), die von K aus nur nach einer Seite B ohne Ende fortgeht, ist die Hälfte von der ganzen durch K nach beiden Seiten B, A ohne Ende fortgehenden Linie AB. Denn da $KA + KB = AB$, und $KA = KB$ (§. 16.); so ist $KB = \frac{1}{2} AB$.

§. 20.

Alle unendliche gerade Linien, die bloß nach einer Seite ohne Ende fortgehen, sind einander gleich, die Lage der Anfangspunkte, von welchen sie ausgehen, sey so verschieden, als man wolle, und sie selbst mögen in einer oder in verschiedenen Ebenen liegen.

Denn sie haben entweder, wie KA, KC, KB u. s. w., alle einerley Anfangspunkt K (Fig. 4.), oder ihre Anfangspunkte sind verschieden. Im erstern Fall sind sie alle einander gleich (§. 16.). Im letztern aber liegt der Anfangspunkt der einen entweder innerhalb oder außerhalb der andern. Liegt er innerhalb der andern, wie in den unendlichen Linien KB und LB; so ist sowol $LB = \frac{1}{2} AB$, als auch $KB = \frac{1}{2} AB$ (§. 19.), also $LB = KB$. Liegt aber der Anfangspunkt der einen Linie außerhalb der andern, wie in den Linien NC und LB, so ist, beide Linien

nien mögen entweder in einer, oder auch in verschiedenen Ebenen liegen, wenn NL nach beiden Seiten F, G ohne Ende fortgeht, vermöge des eben Erwiesenen, NF = LG. Da nun NF = NC, LG = LB (§. 16.); so ist auch NC = LB. Also ist der Satz in allen möglichen Fällen wahr.

§. 21.

Da also LB = KB = LB + KL ist (§. 20.); so wird weder die unendliche Linie LB vergrößert, wenn man eine endliche KL zu ihr hinzu setzt, noch die unendliche KB vermindert, wenn man eine endliche KL von ihr wegnimmt. Also verschwindet jede endliche gerade Linie, so groß sie auch seyn mag, gegen eine unendliche gänzlich, d. i. sie hat zu ihr kein Verhältniß. Wie grundlos und nichtig die vermeinte unauflösliche Schwierigkeit ist, die man bei diesem Satze zu finden glaubte, ist bereits in der ersten Abtheilung ausführlich gezeigt, und zugleich aufs strengste bewiesen, daß überhaupt ganz allgemein keine endliche Größe eine unendliche vergrößern könne, sondern allemal schlechterdings $\infty + a = \infty$ sey. Indessen will ich die Richtigkeit des Satzes KB = LB noch auf eine besondere Art zeigen. Da KL in KB ∞ mal enthalten ist; so ist KB = ∞ . KL. Nun aber ist $\frac{KL}{\infty} = 0$ (1. Abth. §. 41.), folglich KB = $\infty\left(KL - \frac{KL}{\infty}\right)$ =

$= \infty KL - \frac{\infty}{\infty}. KL = \infty . KL - KL$, folglich $KB = KB - KL = LB$. Allein, die Richtigkeit dieses Satzes hat nicht einmal eine Vertheidigung aus der Analysis nöthig. Denn da er aus unumstößlichen geometrischen Gründen richtig hergeleitet worden, so hat er unmittelbar in sich selbst geometrische Gewißheit, so daß, wenn zur Zeit auch noch kein einziger Fall von der Art in der Mathematik vorgefunden wäre, schon eben hieraus nunmehr entschieden seyn würde, daß das Endliche das Unendliche nicht vergrößere. Denn, daß richtig erwiesene geometrische Sätze nicht in sich selbst apodiktisch gewiß seyn sollten, sondern eine wahre Schwierigkeit enthalten könnten, und daher in irgend einem Falle erst anders woher bestätigt werden müßten, das wird doch kein Geometer behaupten wollen. So wird z. B. niemand leugnen, daß der richtig erwiesene Satz: die Seite und die Diagonale eines Quadrats sind incommensurable Linien, nicht erst anderswoher Bestätigung nöthig hat; sondern vielmehr schon aus ihm allein die Möglichkeit incommensurabler Linien richtig schließen, so schwierig auch die Vorstellung ist, daß es keine Zahlen geben soll, durch welche sich ihr Verhältniß genau ausdrucken läßt, da dasselbe sich doch aufs genaueste construiren läßt. Vielmehr wird er schließen, daß das vermeinte Paradoxon bloß in der besondern Natur der Linien, als stetiger Größen, seinen Grund haben müsse, und daher, anstatt den Satz selbst

deshalb zu bezweifeln, nur darauf denken, die Natur stetiger Größen tiefer zu untersuchen, um daraus einzusehen, daß jenes Paradoxon leeres Blendwerk sey.

Dies war eben meine eigentliche Meinung, da ich in meiner Theorie der Parallelen in dem Satz LB = LB + KL, weil er als unumstößlich erwiesen an sich selbst apodiktisch gewiß ist, die hiebei scheinbare Schwierigkeit durchaus für keine wirkliche Schwierigkeit angesehen wissen wollte, und deshalb mit Fleiß keine weitern Gründe aus der Analysis zur Bestätigung des Satzes beibrachte. Ich glaubte nemlich, daß man, wie in allen übrigen Fällen, statt einen geometrisch erwiesenen Satz für paradox oder gar für falsch zu halten, vielmehr leicht einsehen würde, das scheinbar Paradoxe liege bloß in der besondern Natur des ohnehin noch so wenig aufgeklärten Unendlichgroßen, und daß man also diese tiefer untersuchen würde, um die Richtigkeit von jenem desto deutlicher ins Licht zu setzen. Der Recensent meiner Theorie in der Allg. Literat. Zeitung erkannte auch, daß dasselbe nach den Gründen der Analysis in der That nichtig sey, und meynte nur, daß man dieses nicht sogleich im Anfange der Geometrie deutlich zeigen könnte. Daß man aber auch dieses wirklich thun könne, und daß man hiezu nichts weiter nöthig habe, als dem Anfänger bloß die Vorstellung vom Decken zweyer unendlichen geraden Linien näher zu zergliee-

gliedern, zeigte ich darauf in meiner Darstellung der vollkommenen Evidenz 2c. S. 21 = 25. so anschaulich, als man es nur fordern kann, daher ich meine Leser nur hierauf verweisen darf. Ja man kann dem Anfänger seine etwanige Bedenklichkeit noch kürzer benehmen. Man darf ihn nur fragen: ob er die Vorstellung der unendlichen Linie KB etwa durch fortgesetztes Addiren einer endlichen Linie KL erhalten, oder ob er nicht vielmehr umgekehrt, wenn er sich die endliche Linie KL vorstellen will, dieselbe schlechterdings schon in der unendlichen KB zu denken gezwungen sey, und also die Vorstellung der endlichen bloß durch Begrenzung der unendlichen bekommen habe? Zuverlässig wird er, wenn ihn noch kein Nebel vorgefaßter Meinungen umwölkt hat, bald einsehen, daß das letztere wahr, das erstere aber unmöglich sey, daß wir durch fortgesetztes Addiren einer endlichen Linie KL, so groß wir sie auch annehmen mögen, die unendliche KB niemals erlangen, daß mithin KL ein solcher Theil von KB ist, der zu KB gar kein Verhältniß hat, folglich KB um KL vermindern eben so viel ist, als das Ganze KB um so was vermindern, was gar kein Verhältniß zum Ganzen hat, d. i. es gar nicht vermindern.

§. 22.

Alle ganze unendliche geraden Linien CD, AB (Fig. 2. 4.), die nach beiden Seiten C, D

und A, B ohne Ende fortgehen, wo sie im Raum liegen mögen, sind einander gleich.

Denn $FD = \frac{1}{2}CD$, und $KB = \frac{1}{2}AB$ (§. 19.) Nun ist $FD = KB$ (§. 20.). Also $CD = AB$.

§. 23.

Die ganze unendliche gerade Linie AB, die nach beiden Seiten A, B ohne Ende fortgeht, ist zweymal so groß, als eine solche FD, die nur nach einer Seite D ohne Ende fortgeht.

Denn $KB = \frac{1}{2}AB$ (§. 19.), und $KB = FD$ (§. 20.), folglich $\frac{1}{2}AB = FD$. Also $AB = 2FD$.

§. 24.

Da die unendliche Linie KB (Fig. 4.) $= KL + KL + KL + KL + \ldots\ldots \sim$ ist; so ist $KB = \infty . KL$. Wenn man daher ein für allemal jede endliche gerade Linie $KL = \gamma$ setzt; so ist die unendliche gerade Linie $KB = \infty . \gamma$, d. i. KB enthält γ so vielmal, als die unendliche Menge $1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \sim = \infty$ beträgt. Da nun alle unendliche gerade Linien, die nur nach einer Seite ohne Ende fortgehen, einander gleich sind (§. 20.); so ist eine jede solche Linie allgemein $= \infty . \gamma$. Aus diesem Grunde merke ich hier ein für allemal an, daß ich in der ganzen Meßkunst des Unendlichen unter dem Ausdrucke $\infty . \gamma$ nie etwas anders, als eine nur nach einer Seite ohne Ende fortgehende gerade Linie ver-

verstehen werde. Da ferner, wenn man $KB = \infty \cdot KL = \infty \cdot \gamma$ setzt, auf die Größe der endlichen Linie KL oder γ gar nichts ankommt, und z. B. $\infty \cdot n\gamma$, oder $\infty \cdot \frac{1}{n}\gamma$ eben so groß ist, als $\infty\gamma$ (1. Abth. §. 37.); so kann man dieselbe als eine willkührliche beständige Größe ansehen, und daher, wenn man will, auch $\gamma = 1$, schlechthin also $KB = \infty$ setzen. Allein, da ich nach der ersten Abtheilung unter ∞ jedesmal die unendliche Menge $1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \sim$ verstehe; so könnte dieses zuweilen Anlaß geben, Linie und Menge mit einander zu verwirren. Daher behalte ich lieber den vollständigen Ausdruck $\infty\gamma$ bei, und werde in den Fällen, wo es die Bequemlichkeit des Calculs erfordert, $\gamma = 1$ zu setzen, dieses jedesmal anzeigen. Nur muß man, weil $\infty \cdot n\gamma = \infty \cdot \frac{1}{n}\gamma = \infty\gamma$ ist, wohl merken, daß in den Ausdrücken $n\infty\gamma$, oder $\frac{m}{n}\infty\gamma$, der Coefficient n, oder $\frac{m}{n}$, nie γ, sondern bloß ∞ afficirt.

§. 25.

Also ist jede ganze nach beiden Seiten ohne Ende fortgehende gerade Linie $AB = 2\infty\gamma$ (§. 23.).

§. 26.

Jede unendliche gerade Linie ist entweder $= \infty \gamma$, oder $= 2 \infty \gamma$.

Denn eine unendliche gerade Linie hat entweder einen Anfangspunkt, oder nicht. Im ersten Fall kann sie von demselben aus nur nach einer Seite ohne Ende fortgehen, und ist also $= \infty \gamma$ (§. 24.). Im zweiten aber geht sie nach beiden Seiten ohne Ende fort, und ist also $= 2 \infty \gamma$ (§. 25.).

§. 27.

Hieraus folgt also, daß die Ausdrücke ∞, 2∞ sich durch unendliche gerade Linien construiren lassen. Denn, wenn man jede endliche Linie $\gamma = 1$ setzt; so bedeutet ∞ jede nur nach einer Seite, und 2∞ jede nach beiden Seiten zugleich ohne Ende fortgehende gerade Linie. Dagegen ist keine unendliche gerade Linie möglich, durch welche sich die Ausdrücke 3∞, 4∞, und überhaupt $n \infty$, wenn $n > 2$ ist, oder auch der Ausdruck $\frac{1}{n} \infty$, imgleichen $\infty^{\frac{r}{s}}$, wenn $\frac{r}{s}$ größer oder kleiner als 1 ist, construiren ließen. Also sind alle diese Ausdrücke, wenn sie gerade Linien bedeuten sollen, ohne allen Sinn, leere Chimären, und Undinge, und, wie alle imaginäre Größen, bloß zum Behuf des analytischen Calculs brauchbar. So ist z. B. in der Parabel $y^2 = bx$,

für

für $x = \infty$, $y = b^{\frac{1}{2}} \infty^{\frac{1}{2}}$, also y ein Unding, wie es auch (1. Abth. §. 9. n. 4.) seiner Natur nach nicht anders seyn kann.

§. 28.

Eben hieraus folgt also auch von selbst, daß keine unendliche gerade Linie gegen eine andere unendlichgroß oder unendlichklein seyn kann, und daß es also für gerade Linien keine verschiedene Ordnungen des Unendlichgroßen giebt, sondern jede unendliche gerade Linie nur ein Unendlichgroßes der ersten Ordnung ist (1. Abth. §. 51. 65.).

II. Von den unendlichgroßen ebenen Flächen.

§. 29.

Die zwischen den unendlichgroßen Schenkeln AB, AC eines Winkels BAC ohne Ende fortgehende ebene Fläche ABC (Fig. 6.), heißt die Fläche dieses Winkels, und überhaupt eine Winkelfläche.

§. 30.

Also ist derjenige Theil der ganzen unendlichen Ebene, welcher über einer nach beiden Seiten ohne Ende fortgehenden geraden Linie AB (Fig. 4.) liegt, die Fläche eines Winkels von 180°, und die ganze unendliche Ebene sowol über als unter AB ist die Fläche eines Winkels von 360°.

Denn

Denn die unendliche Ebene über AB ist die Fläche des geraden Winkels AKB, der aus den beiden Nebenwinkeln AKC und CKB besteht, folglich $= 180^o$ ist. Die ganze unendliche Ebene über und unter AB aber ist die Fläche eines Winkels, der aus den vier Winkeln AKC, CKB, BKD, DKA besteht, folglich $= 360^o$ ist.

§. 31.

Wenn zween Winkel BAC, DAE, (Fig. 6.) die einerley Scheitel A haben, einander gleich sind; so sind ihre Flächen ABC, ADE einander gleich und ähnlich.

Denn da gleiche Winkel einander decken; so läßt sich der Winkel BAC auf den Winkel DAE dergestalt legen, daß AB auf AD, und AC auf AE fällt. Nun deckt der unendliche Schenkel AB den unendlichen AD, und der unendliche AC den unendlichen AE (§. 16.), folglich muß auch die unendliche Fläche ABC, die zwischen den unendlichen Schenkeln AB, AC als ihren beiden Grenzen enthalten ist, die unendliche Fläche ADE, die zwischen den unendlichen Schenkeln AD, AE als ihren beiden Grenzen enthalten ist, decken. Also sind die unendlichen Flächen ABC, ADE einander gleich und ähnlich.

§. 32.

Dieser Satz ist eben so offenbar, als der §. 16., und eine unmittelbare Folge aus diesem.

Ihn

Ihn zweifelhaft machen wollen, heißt den Wachenden zu überreden suchen, daß er im tiefsten Schlafe liege. Indessen, wenn ein Karsten ihn, seiner Klarheit ungeachtet, dennoch in Nebel zu hüllen sucht; so ist es nöthig, diese Nebel, die, so dünne sie auch sind, schwachen Augen doch hinderlich seyn könnten, völlig zu zerstreuen.

Zuerst sagt Hr. Karsten math. Abhandl. II. S. 172. von den Winkelflächen eben das, was er von den unendlichen Linien sagt, daß, weil sie nach einer Seite unbegrenzt sind, sie sich nach dem Grundsatze der Congruenz keinesweges vergleichen lassen. Er beruft sich deshalb auf die oben angeführte Kästnerische Erklärung der Congruenz, und druckt sich so aus: „Ausgedehnte „Größen congruiren, wenn sie zwischen einerley „Grenzen enthalten sind. Wenn zwey Flächen „zwar an einer Seite begrenzt, an einer andern „Seite aber unbegrenzt sind, und wenn man „gleich alsdenn wol einsiehet, daß die Grenzen „der einen, so weit sie vorhanden sind, mit den „Grenzen der andern zusammenfallen können; „so fällt doch alle Idee vom congruiren an der „unbegrenzten Seite weg. Es soll alles zusammenfallen, was zwischen den Grenzen enthalten ist: wo aber keine Grenzen sind, da „kann man auch keine Vorstellung von dem haben, was dazwischen enthalten ist.„ Allein, ohne mich dabei aufzuhalten, daß ich hier im

zwei=

zweiten Period nicht verstehe, wie in zwey Flächen, die an einer Seite unbegrenzt sind, gleichwol an dieser bis zu einer gewissen Weite Grenzen vorhanden seyn, und zusammenfallen können; so hat Hr. Karsten nicht bedacht, daß er sich sowol im ersten als dritten Period mit seinen eigenen Worten widerlegt. Er sagt: wo keine Grenzen sind, da weiß man auch nicht, was zwischen ihnen liegt. Aber was sind denn des Winkels BAC unendliche Schenkel AB, AC? Sind dieses nicht die beiden Grenzen, zwischen welchen die ganze Winkelfläche ABC enthalten ist? Und sind nicht eben so auch die unendlichen Schenkel AD, AE die beiden Grenzen, zwischen welchen die ganze Winkelfläche ADE enthalten ist? Und da nun diese vier Grenzen, wenn beide Winkel BAC, DAE gleich sind, Paarweise zusammenfallen und einander decken (§. 16.), muß also nicht auch alles, was zwischen ihnen ist, d. i. müssen nicht die ganzen Winkelflächen ABC, ADE zusammenfallen und sich decken? *)

Sind

*) Man sieht hieraus, daß die Kästnerische Erklärung vom Decken selbst für die unendlichen Winkelflächen passend ist, und im Folgenden wird sichs zeigen, daß sie überhaupt auf alle ausgedehnte unendliche Größen anwendbar ist, nur bloß die unendlichen Linien ausgenommen, weil diese höchstens nur eine Grenze haben können. Wäre also diese einzige Ausnahme nicht; so wäre ihre Anwendbarkeit sogar im ganzen Gebiete des Unendlichen ganz uneingeschränkt.

Sind aber Schlüsse hier nicht hinreichend, sondern soll ich, nach seiner gleich darauf folgenden zweiten Foderung, es den Augen sichtbar machen, daß, wenn die unendlichen Grenzen der beiden Winkelflächen sich decken, auch sie selbst sich wirklich decken; so kann ich dieses freilich so wenig, als wenn er gefordert hätte, ich sollte ihm das Ende der Centillionsten Meile zeigen. Aber hier erkläre ich mich auch nochmals, wie ich es Zeitlebens thun werde, daß geometrische Anschauung, Evidenz und Construction für mich nicht Augenöffnung, Gesichtsklarheit und Sandfurchen oder Dintenstriche sind.

Doch, Hr. Karsten weiß der Sache noch bessern Nachdruck zu geben. Es ist (wie soll ichs am gelindesten nennen?) sonderbar, bei Vergleichung der Winkel an ihre Fläche einmal denken zu wollen. Seine eigene Worte sind a. a. O. S. 173. diese: „Die Grenzen der Winkel„ (der zwischen ihnen enthaltenen Flächen vermuthlich wol nicht) „sind ihre Seitenlinien, und bei „der Frage, ob die Winkel gleich oder ungleich „groß sind, ob sie einander decken, oder nicht, „kommt die Länge der Seitenlinien in keine Be„trachtung, sondern nur die mehrere oder min„dere Abweichung der einen von der andern. „Wenn Spitze auf Spitze liegt, und die Schen„kel an einander schließen, so weichen die Schen„kel beider Winkel gleichweit von einander ab.

„Wie

„Wie lang oder kurz die Schenkel auch seyn mö„gen, wie groß oder klein die Fläche sey, dar„auf kommt nichts an. Es fällt auch nieman„den ein, an die Fläche hiebei zu denken *).
„Jeder=

*) Hr. M. Eichler hat, da er diese Stelle las, vermuthlich nicht wahrgenommen, daß er in den in s. Disp. S. 21 = 23. aus dem Proclus, Müller, Weidler und Ramus angeführten Stellen, aus welchen er zeigt, daß diese Männer gleichfalls schon der Meinung gewesen, daß man bei den Winkeln auch ihre Flächen in Betrachtung ziehen müsse, gar nicht wider mich, sondern vielmehr geradezu wider Hr. Karsten streitet; denn sonst hätte dieses seinen Entschluß, seine Abhandlung dem Vulcan zu opfern, unfehlbar zur Wirklichkeit gebracht. Wenn ich in meiner Theorie der Parallelen S. 70. sage: ich hätte es für nöthig gefunden, die Sätze von der Gleichheit und Ungleichheit der Winkelflächen, ob sie gleich als Axiomen gelten könnten, strenge zu beweisen, weil die Geometer dieselben bisher in keine Betrachtung gezogen; so konnte doch wol ein jeder sehen, daß ich, nach meiner Definition, nur von unendlichen Flächen redete, und zugleich nur das sagen wollte, daß an die von mir bewiesenen Sätze meines Wissens noch von niemanden gedacht wäre, und dieses widerlegt auch von allen jenen Stellen keine einzige. Daß es aber, mich ausgenommen, nie in eines Menschen Seele gekommen, bei dem Winkel an die zwischen seinen Schenkeln liegende Fläche zu denken, so was zu behaupten, bin ich nicht nur zu kurzsichtig, sondern nach meiner Einfalt glaube ich vielmehr ganz das Gegentheil, und bin der Meinung, daß Hr. Karsten von Hr. Eichler ganz gründlich widerlegt ist.
Uebri=

„Jedermann im gemeinen Leben beurtheilt die „Größe eines Winkels, den etwa ein paar Stäbe „mit einander machen, daraus, ob er mehr „oder weniger offen ist.„

Es ist freilich sehr bekannt, daß man das Decken ebener geradlinichter Winkel beurtheilen kann, ohne auf die Länge der Schenkel die mindeste Rücksicht zu nehmen, und daß man von demselben aufs vollkommenste überzeugt ist, wenn man nur weiß, daß ihre Schenkel auf einander fallen, so klein und ungleich man auch diese annehmen mag. Aber worin liegt der Grund hievon? Liegt er nicht bloß darin, weil durch den kleinsten Theil der Schenkel als gerader Linien schon

Uebrigens wird das Verfahren, sich die Neigung der Schenkel bloß am Scheitel vorzustellen, und die darauf beruhende Vergleichung des Berührungswinkels am Kreise, immer ein Fehler bleiben, wenn gleich Hr. Eichler über meine mathematische Unwissenheit hier noch so sehr die Achseln zuckt, und, um mich völlig herabzuwürdigen, zum Schlusse seiner ihm sonst immer Ehre machenden Probeschrift durch unwürdige Schleichwege Sachen herbeizieht, die gar nicht hieher gehören. Ich dächte überhaupt, meine Beurtheiler sorgten, statt voreilig zu tadeln, und sich zu verwundern, sowol für die Wissenschaft, als für ihre eigene Ehre sicherer, wenn sie erst abwarteten, bis mir in meiner Lage Zeit und Umstände verstatten, mich über diejenigen Punkte, die ich gleichsam im Vorbeigehen berührt habe, umständlich auszulassen.

schon die ganzen unendlichen Schenkel nach ihrer Lage und Größe, und daher auch die unendliche Fläche zwischen ihnen, völlig gegeben sind? Eben so bekannt ist es, daß Winkel und Winkelfläche nicht einerley sind, sondern, daß man beim Winkel bloß nach der Neigung, oder (wie Hr. Karsten meinem Bedünken nach noch passender sagt) nach der Abweichung der Schenkel von einander frägt *). Aber wie entsteht nun unsere Vorstellung von der verschiedenen Größe dieser Neigung oder Abweichung der Schenkel? z. B. wie kommen wir dazu, zu sagen, der Schenkel

*) So sorgfältig ich auch in meiner ganzen Theorie der Parallelen den Winkel selbst von seiner Fläche unterschieden habe; so mußte ich doch zur größesten Befremdung lesen, wie Hr. Karsten das Versehen eines Recensenten, der Winkel und Winkelfläche vermengt hatte, nicht nur auf Rechnung meiner Theorie schrieb, sondern es gar als Uebergang zur Prüfung derselben mit den Worten anwandte: „Hier haben wir das Princip vortrefflich angewandt, daß die Größe eines ebenen Winkels „durch die Größe der Ebene bestimmt wird, die „zwischen seinen ohne Ende verlängerten Schenkeln liegt„ und nun hiedurch seine Leser schon voraus urtheilen ließ, wie sehr die Wahrheit in der Geometrie in Gefahr wäre, ihre ganze jungfräuliche Schönheit und Unschuld, die Hr. Hindenburg so vortrefflich geschildert, durch mein Buch einzubüßen. Ein solcher Uebergang konnte mich denn freilich schon vorher belehren, was für eine unpartheyische und kaltblütige Beurtheilung ich mir von Hr. Karsten zu versprechen hatte.

kel AC (Fig. 6.) habe gegen AB eine kleinere Neigung, oder weiche von AB weniger ab, als der Schenkel AD? Ich dächte, doch wol bloß dadurch, weil AC noch innerhalb der Ebene liegt, die zwischen AB und AD ohne Ende fortgeht, und daher nur einen Theil von ihr abschneidet? Wollte man hier die Distinction machen: man stelle sich AC bloß innerhalb des Winkels BAD, nicht aber innerhalb seiner ebenen Fläche ABD vor; so wäre dieses eine sehr elende Ausflucht. Denn innerhalb des Winkels BAD heißt doch zwischen seinen Schenkeln AB, AD, wenn diese auch ohne Ende verlängert werden, und diese liegen nach Euklids achter Definition in einer Ebene; also liegt zwischen ihnen ohne Ende fort ein Theil ABD dieser Ebene, der Schenkel AC aber liegt, nach der Voraussetzung, in eben der Ebene, in welcher AB, AD liegen, also muß er in demjenigen Theil ABD von ihr liegen, der zwischen AB, AD enthalten ist, folglich ohne Ende fort die unendliche Fläche ABD theilen. Sich den Schenkel AC innerhalb des Winkels BAD vorstellen, was heißt dieses also anders, als sich vorstellen, AC theile die unendliche Fläche ABD; und sich vorstellen, AC weiche weniger von AB ab, als AD, was heißt dieses also anders, als die unendliche Fläche zwischen AB und AC nur als einen Theil von der zwischen AB und AD ansehen? Gerade dieß stellt man sich auch vor, wenn man sagt: der Winkel, den ein paar Stäbe ma-

 chen,

chen, ist mehr oder weniger offen. Liegt der Stab AC auf AB, so ist zwischen ihnen kein Winkel, weil kein Theil der Ebene zwischen ihnen liegt. Stellt man sich beide Stäbe als ohne Ende fortgehend vor, und dreht den Stab AC um den Scheitel A herum, daß er nach und nach in die Lagen AC, AD u. s. w. kommt; so rückt er immer weiter von AB fort, d. i. die unendliche immerfort offene Fläche zwischen ihm und zwischen AB, die er beschreibt, wird ein immer größerer Theil der ganzen unendlichen Ebene, und kommt er wieder zum Stabe AB zurück, so hat er sie ganz beschrieben. Man mag also immerhin sich und seinen Lehrling zu überreden suchen, man dürfe bei der Vorstellung des Winkels an seine Fläche gar nicht denken, man könne von dieser gänzlich abstrahiren; so ist dieses bloße Täuschung. Man kann die Schenkel AB, AC nicht als zwo verschiedene Linien denken, als so fern man sie als zwey Grenzen einer zwischen ihnen liegenden Fläche denkt. Denkt man diese Fläche weg, so fallen AB, AC zusammen, und die Vorstellung des Winkels verschwindet. Eben dieses ist auch offenbar, wenn man auf die Art sieht, wie sich die Winkel messen lassen. Wenn sich die Neigung der Schenkel AB, AC ohne ihre Zwischenfläche denken läßt; warum ist es dann schlechterdings unmöglich, dieselbe unmittelbar durch eine andere Neigung zu messen? d. i. ihr Verhältniß zur Neigung der Schenkel im rechten

Win-

Winkel, unmittelbar durch diese letzte Neigung als ihr Maaß zu bestimmen, da sich doch jede Linie durch eine andere, die man zum Maaße annimmt, und eben so auch jede Fläche und körperliche Ausdehnung durch eine andere, unmittelbar messen, d. i. ihr Verhältniß zum homogenen Maaße durch dieses unmittelbar bestimmen läßt. Warum ist man vielmehr, um das Verhältniß verschiedener Neigungen zu bestimmen, nothwendig gezwungen, ganz heterogene Größen zu Hülfe zu rufen, und das Verhältniß jener lediglich durch das Verhältniß dieser auszumitteln, folglich beim Messen der Winkel jedesmal auf eben die Art zu verfahren, wie man z. B. bei Messung der Wärme verfährt, wenn man ihre Größe durch Quecksilberhöhen bestimmt. Das bequemste Verfahren hiebei ist bekanntlich, daß man die Winkel durch Kreisbogen mißt, die man aus dem Scheitel zwischen den Schenkeln beschreibt, und wenn erst einmal erwiesen worden, daß dergleichen Bogen sich eben so wie die Winkel verhalten; alsdenn darf man beim Messen der Winkel freilich nur auf die Größe dieser Bogen sehen, und kann also in diesem Falle von den Flächen der Winkel gewissermaaßen abstrahiren. Aber wie kommt man zum Beweise des Satzes, daß die Bogen den Winkeln proportional sind? Geschieht dieses nicht wieder ursprünglich durchs Decken der Kreisausschnitte, d. i. der Flächen, die zwischen den Schenkeln zweyer gleichen Winkel

und dem sie begrenzenden Bogen enthalten sind? Muß man also nicht wenigstens immer gleiche Stücke von den unendlichen Schenkeln annehmen, um so auch die Flächen zwischen ihnen wenigstens bis zu einer gewissen Weite, nemlich in der Gestalt eines Sectors, in Betrachtung ziehen, um erst ein Maaß für die Winkel auszumitteln, und uns zu überzeugen, daß wir hiezu die Bogen anzunehmen befugt sind? Und wenn es auch das Ansehen hat, als messen wir die Winkel bloß durch Kreisbogen, ohne dabei auf die Kreisausschnitte zu sehen, ist nicht selbst dieses Täuschung? Wenn wir den Kreisbogen zwischen die Schenkel des Winkels legen, geschieht dieses nicht eben dadurch, daß wir den Kreisausschnitt als ein Stück der Winkelfläche für gleiche Schenkel auf die Winkelfläche legen, und messen wir also den Winkel nicht wirklich jedesmal eigentlich durch den ganzen Ausschnitt? Ja da die Ausschnitte eben sowol als die Bogen den Winkeln proportional sind; so sind wir doch wenigstens befugt, die Winkel eben sowol durch Ausschnitte, d. i. durch Stücke ihrer unendlichen Flächen, als durch Bogen zu messen. Und hat man es sich wol je einfallen lassen, dieses Verfahren für unnütz zu erklären, oder es jemanden gar zum Verbrechen oder zum Zeichen der Unwissenheit anzurechnen? Gesetzt also selbst, man könnte nicht nur von der Neigung der Schenkel auch ohne die zwischen ihnen liegende Fläche eine klare Vorstellung

 haben,

haben, sondern auch, beim Messen des Winkels durch den Bogen, vom Ausschnitte, als einem Stück der Winkelfläche völlig abstrahiren; so ist doch einmal die unendliche Fläche zwischen den Schenkeln in der That da, und was kann also irgend jemanden berechtigen, die Untersuchung derselben schlechthin von der Hand zu weisen? Glaubt man denn etwa, Liebhaber der Mathematik, die gründliche Erweiterung ihrer Kenntnisse suchen, und jetzo schon einmal auf die Flächen der Winkel aufmerksam gemacht worden, dadurch zu befriedigen, daß man mit gelehrt verachtender Mine sich wundert, wie ihnen auch nur der Gedanke beikommen könne, nach der Natur der Winkelflächen zu fragen? Wenn der Theolog seine Schüler warnt, über die Geheimnisse der Religion, z. B. über die innere Natur des göttlichen Wesens und seiner unendlichen Eigenschaften, über den eigentlichen Zustand der abgeschiedenen Seelen, die Beschaffenheit der auferweckten Körper u. s. w. nicht unnütz zu grübeln; so hat er völlig Grund, denn eben dieselbe Vernunft, die nach diesen Dingen frägt, antwortet sich zugleich, daß es ihr in ihrer gegenwärtigen Verfassung an allem Grundstoffe fehlt, aus welchem sie die Kenntnisse, die sie hier wünscht, zusammensetzen könnte. Aber hat denn schon irgend ein Mathematiker, nicht wie Hr. Karsten durch Machtsprüche, sondern, wie sichs für den Mathematiker vorzüglich gebührt, durch über-

zeugende Gründe bewiesen; daß dieses auch beim Unendlichen in der Geometrie der Fall sey? Ist uns hier nicht vielmehr der Grundstoff zu seiner Bearbeitung durch die Natur unserer Sinnlichkeit ganz vollständig und intuitiv im Raume selbst gegeben? Wenn also der Mathematiker alle freye Untersuchung desselben durchaus zu unterdrücken sucht, und sie zu diesem Zwecke als Ignoranz der ersten geometrischen Begriffe, ja zugleich als gefährliche Ketzerey verschreit, und dieses Geist des Euklids, Geist der Mathematik seyn sollte, dann wüßte ich wahrlich nicht, worin dieser vom Geiste der despotischsten Hierarchie unterschieden wäre.

§. 33.

Wenn Hr. Karsten a. a. O. seine Leser ersucht, es sich nicht befremden zu lassen, daß er hier die allerleichtesten Elementarsätze der Geometrie so umständlich erörtert; so muß ich dagegen die meinigen ersuchen, es sich nicht befremden zu lassen, daß ich so umständlich gezeigt habe, wie schief und unrichtig diese vermeinte Erörterung ist. Es ist dieses gewiß kein angenehmes Geschäfft für mich, und bei einem unwichtigern Gegner würde ich Angriffen von der Art nichts weiter als das großmüthige Stillschweigen entgegensetzen, das sie verdienen. Allein, bei einem Gegner, dessen Ansehen in der mathematischen Welt so groß ist, sehe ich mich zu dem widrigen

drigen Geschäffte unvermeidlich gezwungen. Jeder Unparteyischer kann nun desto leichter einsehen, wie klar die Sache ist, welche Hr. Karsten durch alle mögliche Kunstgriffe zu verwirren sucht. Es kommt bei dem Satze: daß die unendlichen Flächen gleicher Winkel BAC, DAE (Fig. 6.) gleich sind, lediglich darauf an, ob die unendlichen Schenkel derselben gleich sind, und einander decken. Ist dieses; so müssen auch die unendlichen Flächen zwischen ihnen als ihren Grenzen einander decken und gleich seyn, und alle weitere Einwendungen dawider sind in diesem Fall nichts als bloße Luftstreiche. Da nun die Gleichheit der unendlichen Schenkel (§. 16.) mit aller Schärfe erwiesen worden; so ist die Richtigkeit jenes Satzes außer allem Zweifel. Will jemand daran zweifeln, ob die unendlichen Flächen der gleichen Winkel BAC, DAE gleich und ähnlich sind; so frage er sich doch: ob er, die Verschiedenheit ihrer Oerter ausgenommen, in der einen wol irgend etwas von der andern verschiedenes zu denken im Stande ist, oder ob nicht sein Begriff von beiden ganz und gar ein und eben derselbe ist? Muß er nun das letztere schlechterdings gestehen, und er zweifelt doch noch, ob die beiden Winkelflächen congruiren, dann erspare er sich nur alle Mühe, sich in diese Materie zu mischen, indem ich ihm keine andere Antwort zu geben wüßte, als die ein jeder Geometer demjenigen zu geben genöthigt wäre, der es noch zweifel-

 haft

haft fände, ob auch von einem Punkt zum andern nur eine gerade Linie möglich sey.

§. 34.

Wenn in einer Ebene zwey Winkel BAC, BAN (Fig. 6.) einerley Scheitel A haben; so verhalten sie sich wie ihre Flächen ABC, ABN, das Verhältniß der Winkel mag rational, oder irrational seyn.

Denn man setze die Winkel CAD, DAE, EAF u. s. w. alle so groß, als BAC; so sind auch ihre Flächen gleich (§. 31.), folglich ist die Fläche ABD = 2ABC, ABE = 3ABC, ABF = 4ABC u. s. w. Nun aber ist auch der Winkel BAD = 2BAC, BAE = 3BAC, BAF = 4BAC u. s. w., folglich hat ein 2mal größerer Winkel eine 2mal größere Fläche, ein 3mal größerer Winkel eine 3mal größere Fläche u. s. w. d. i. überhaupt ein n mal größerer Winkel eine n mal größere Fläche. Also verhalten sich zwey Winkel BAC, BAN allemal wie ihre Flächen ABC, ABN (1 Abth. §. 86.).

§. 35.

Da nun die Fläche eines Winkels von 360° die ganze unendliche Ebene ist, in welcher er liegt (§. 30.); so verhält sich jeder Winkel BAC zu 360°, wie die Winkelfläche ABC zur ganzen unendlichen Ebene.

§. 36.

Zween Winkel BAC (Fig. 6.) und GBD (Fig. 2.) verhalten sich allemal wie ihre Flächen ABC, BGD, wo sie auch immer in der Ebene liegen mögen.

Denn BAC : 360° = Fläche ABC : ganzen unendlichen Ebene, und GBD : 360° = Fläche BGD : ganzen unendlichen Ebene (§. 35.), also ist BAC : GBD = Fl. ABC : Fl. BGD.

§. 37.

Also haben gleiche Winkel allemal gleiche Flächen; und umgekehrt: gleiche Winkelflächen gehören auch zu gleichen Winkeln, wo sie auch in der Ebene liegen mögen.

Denn, wenn GBD = BAC ist, so ist auch BGD = ABC; und ist BGD = ABC, so ist auch GBD = BAC (§. 36.).

§. 38.

Ein größerer Winkel hat eine größere Fläche; und umgekehrt: eine größere Winkelfläche gehört auch zum größern Winkel, wo sie auch in der Ebene liegen.

Denn, wenn GBD > BAC, so ist auch BGD > ABC; und wenn BGD > ABC, so ist auch GBD > BAC (§. 36.).

§. 39.

§. 39.

Zwey Winkelflächen KAD und LHG (Fig. 4.) zusammen sind allemal größer, als eine von ihnen.

Denn HLG : AKD = LHG : KAD (§. 36.), folglich

AKD + HLG : AKD = KAD + LHG : KAD.

Da nun AKD + HLG > AKD ist, so ist auch KAD + LHG > KAD.

§. 40.

Wenn zwo in einem Punkte N zusammenstoßende gerade Linien ND, NG (Fig. 4.) von einer dritten AB in K und L geschnitten werden; so ist der äußere Winkel NLB größer, als der entgegengesetzte innere NKB.

Denn man verlängere ND bis C, und ziehe durch C und L die gerade Linie CH; so besteht die Fläche des Winkels ALG außer dem unendlichen Stücke KLHD noch aus den beiden Winkelflächen AKD und LHG. Da nun schon diese allein zusammen größer sind, als eine von ihnen (§. 39.); so ist um so offenbarer, daß die Fläche des Winkels ALG größer ist, als die Fläche des Winkels AKD, folglich ist auch der Winkel ALG > AKD (§. 38.). Nun aber ist ALG = NLB, und AKD = NKB. Also NLB > NKB.

§. 41.

Wenn in einer Ebene zwo gerade Linien QB, gE (Fig. 3.) von einer dritten FJ in A und C so geschnitten werden, daß der äußere Winkel gCJ dem entgegengesetzten innern QAJ gleich ist, (ein Fall, der nach Euklids 23stem Satz durchaus möglich ist); so sind QB, gE mit einander parallel.

Denn sie können weder nach der Seite Q, g, noch B, E zusammenstoßen, weil sonst im erstern Fall gCJ > QAJ, im letztern aber FAB > FCE (§. 40.), folglich QAJ > gCJ wäre.

§. 42.

Man kann also durch jeden Punkt C mit AQ eine Parallellinie ziehen, denn man darf nur AJ ziehen, und, nach dem 23sten Satze des Euklids, den Winkel JCg = JAQ machen. Wenn demnach in einer Ebene zwo gerade Linien AQ, Cg auf einer dritten FJ so stehen, daß sie nach einer Seite hin gleiche Winkel QAJ, gCJ mit ihr machen; so ist die Fläche ACgQ zwischen ihnen ohne Ende fort unbegrenzt, und daher unendlichgroß. Da aber der Winkel gCJ = QAJ ist; so ist auch die Winkelfläche CgJ = AQJ (§. 37.), folglich verschwindet die Fläche ACgQ sowol gegen die Winkelfläche AQJ als CgJ im arithmetischen Verhältnisse völlig, so daß weder die erstere vermindert wird, wenn man sie von ihr weg-

wegnimmt, noch die letztere vergrößert wird, wenn man sie zu ihr hinzusetzt. Also ist hiedurch aufs neue geometrisch erwiesen, daß auch eine unendlichgroße Größe gegen eine andere im arithmetischen Verhältnisse völlig verschwinden kann. Nun ist die Winkelfläche CgJ ein Theil von der Winkelfläche AQJ. Also ist zugleich geometrisch erwiesen, daß bei unendlichen Größen das Ganze nicht immer größer ist, als sein Theil, sondern hier der Theil auch dem Ganzen gleich seyn kann, mithin der 9te Grundsatz des Euklids, der bei endlichen Größen, auf welche Euklid ihn auch allein anwendet, ganz allgemein gültig ist, beim Unendlichen gar nicht brauchbar ist, und man nie befugt ist, zu schließen: weil das eine Unendliche ein Theil des andern ist, so ist es kleiner, als dieses, sondern daß in diesem Fall die Frage, ob es wirklich kleiner oder ihm gleich sey, jedesmal erst aus andern Gründen entschieden werden muß.

§. 43.

Dieser vortreffliche unsere Erkenntniß so sehr erweiternde Satz ist nun gleichwol gerade derjenige, der das Schicksal hat, für so heterodox verschrieen zu werden. Und warum denn? Bloß, weil er die Allgemeinheit des 9ten Euklideischen Grundsatzes lediglich auf endliche Größen einschränkt. Aber hat man denn auch bereits ruhig und unparteyisch untersucht, ob auch seine Aus-

deh-

dehnung über die Grenzen des Endlichen hinaus so unmittelbar einleuchtend ist, als es für einen Grundsatz erfordert wird. Euklides hat ihn wenigstens nie über dieselben ausgedehnt, und sein Schatten kann also hiebei ganz ruhig bleiben. Daß seine Ausdehnung durchs ganze Gebiet des Endlichen unmittelbar einleuchtend ist, das ist offenbar, weil hier jeder Nebentheil A des Theils B zum Ganzen C ein wahres endliches Verhältniß hat, folglich die Größe A, um welche das Ganze C den Theil B übersteigt, hier allemal ein bestimmter aliquoter Theil von B ist, d. i. weil B durch seinen Nebentheil A um $\frac{1}{n}B$ vergrößert wird. Hieraus folgt aber, daß die Vergrößerung, welche B durch A erhält, immer geringer wird, je kleiner der Bruch $\frac{1}{n}$, d. i. je größer n wird. Man setze also, es werde $A = \frac{1}{\infty}B$; so ist $B + A = B + \frac{1}{\infty}B = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)B = B$. Sollte nun nicht jeder unparteyische Wahrheitsforscher hier wenigstens aufmerksam werden, und nachfragen: ob es nicht vielleicht wirklich dergleichen Größen A, B geben könne, wo $A = \frac{1}{\infty}B$ ist? Denn, wenn es der-

dergleichen gäbe, so müßte er doch nun schon einsehen, daß in Ansehung dieser der 9te Grundsatz des Euklids kein unmittelbar klares Axiom mehr wäre. Nun aber ist doch, dünkt mir, wenigstens das schon immer bekannt gewesen, daß das Endliche zum Unendlichen gar kein Verhältniß hat, d. i. daß, wie groß auch eine endliche Größe a seyn mag, wenn b unendlichgroß ist, $a < \frac{1}{n} b$, folglich $a = \frac{1}{\infty} b$ ist, folglich trifft hier schon der Fall ein, daß $b + a = b + \frac{1}{\infty} b = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right) b = b$ ist. Hätte also der unbefangene Wahrheitsfreund hieraus nun nicht schon wenigstens argwöhnen müssen, daß dieser Fall auch bei Größen vorkommen könne, die beide unendlichgroß sind? Jeder Unparteyische urtheile also, ob für den, der auf diese Art über die Ausdehnung des 9ten Euklidschen Axioms auf unendliche Größen mit Wahrheitsliebe nachdenkt, dieselbe auch hier noch unmittelbare Evidenz haben, mithin ein wahres Axiom seyn könne. Daß übrigens schon an sich klar ist, wie jede endliche gerade Linie nur ein unendlichvielter Theil einer unendlichen sey, ist schon §. 21. erwiesen worden. Daß aber eben so schon an sich klar ist, daß jeder

Pa-

Parallelstreifen ACgQ $= \frac{1}{\infty}$ AQJ, folglich AQJ = CgJ sey, habe ich bereits in meiner Darstellung S. 13. gezeigt, und will es hier noch in derjenigen Gestalt zeigen, in welcher Hr. Karsten dergleichen Beweise ausdrücklich verlangt. Man trage also AC auf AJ so vielmal auf, als man will, richte in den Theilungspunkten D, K u. s. w. die Winkel JDM, JKN u. s. w. auf, und mache sie alle = JCg = JAQ. Da nun die unendlichen Linien AQ, Cg, DM, KN u. s. w. alle gleich sind (§. 20.); so ist offenbar, daß die unendlichen Flächen ACgQ, CDMg, DKNM alle congruiren, und man in der einen nichts denkt, was man nicht auch in der andern dächte, daß sie folglich alle einander gleich sind. Also ist die Fläche ACgQ in der Winkelfläche AQJ eben so vielmal enthalten, als AC in der unendlichen Linie AJ, d. i. ∞ mal, folglich ist ACgQ $= \frac{1}{\infty}$ AQJ, folglich AQJ + ACgQ $= \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)$ AQJ = AQJ. So läßt sich schon unmittelbar aus der Natur des Satzes selbst einsehen, woher der 9te Grundsatz des Euklids hier seine Anwendbarkeit schon über ihre Grenzen ausdehnen würde, obgleich dieses nicht einmal besonders zu zeigen nöthig war, da in der ersten Abtheilung die ganze Sache bereits aufs allge-

 mein-

meinste erwiesen worden. Indessen wiederhole ich auch hier, was schon §. 21. erinnert worden, daß die Richtigkeit des Satzes, AQJ = CgJ, gar keine Vertheidigung aus der Analysis nöthig hat, sondern da er aus unumstößlichen geometrischen Gründen richtig erwiesen worden, so ist er in sich selbst geometrisch gewiß, und eben durch ihn ist also schon völlig entschieden, daß Euklidens 9ter Grundsatz hier gar nicht anwendbar ist. Alles, was man daher sich und andern hier weiter von Schwierigkeit vorsagen mag, ist nichts als leerer Schall. Damit es indessen nicht scheine, ich wäre Einwendungen übergangen, welche Hr. Karsten, Hr. Eichler, und neuerlich auch Hr. Prof. Hindenburg für ganz unwiderlegbar ausgegeben; so wird es doch nöthig seyn, dieselben etwas näher zu beleuchten.

§. 44.

Herr M. Eichler wird hier gleich anfangs witzig, indem ihn der Parallelstreifen an den Halsstreifen des Hundes beim Phädrus erinnert. — Er meynt ferner, ich hätte mich bei Auflösung dieses Scrupels im Kreise herumgedreht. Aber dies war wol ein bloßes Mißverständniß, über welches ich mich schon §. 21. erklärt, und welches er sich durch meine Darstellung, die ihm kaum unbekannt seyn konnte, völlig hätte heben können. Ihm ist auch bange, daß meine Schüler sich an mir ärgern und denken

ken würden, ich wollte sie des Gesichts berauben; ich kann aber zu seiner Beruhigung feierlich versichern, daß binnen sieben Jahren dieser Vorfall sich noch bei keinem von ihnen eräugnet hat, obgleich ihre Zahl schon in die Hunderte geht. Das schrecklichste Erstaunen aber äußert er darüber, daß der Theil dem Ganzen soll gleich seyn können. Dieses nennt er S. 11. *putidum* assertum, quo magis *portentosum* a suis credi superstitio postulare nequeat; talem *maculam*, qua nulla est *turpior*. Hier ist also Hr. Eichler im Eifer, und da muß man niemanden widersprechen, sondern ihm billig erst Zeit zum Besinnen lassen. Er scheint sich auch wirklich bald wieder gefaßt zu haben, denn S. 12. sagt er schon, daß, seinem Bedünken nach, jene Härte, die uns in dem Satze so sehr mißfällt, bloß in den Worten liege, und sich durch eine gehörige Erklärung leicht mildern lasse, und daß er nichts dawider habe, wenn jemand deshalb, weil $\frac{A+a}{A} = 1 + \frac{a}{A} = 1 + \frac{a}{\infty}$ seyn kann, sagt, daß $A + a = A$ sey. Und so freue ich mich dann, daß Hr. Eichler, nach dem hitzigsten Streite, im Grunde doch wirklich mit mir eins ist; denn daß ich gleichfalls aufs festeste überzeugt bin, daß der ganze vermeinte Anstoß, wider den er kurz vorher so sehr eiferte, bloß in Worten liegt,

und daher eine unnütze Logomachie ist, davon kann ich ihn, weil er noch daran zu zweifeln scheint, völlig versichern. Doch nein! meine Freude war zu übereilt. Denn Hr. Eichler hatte bei jener so guten Erklärung noch etwas in petto. Gleichheit und Gleichheit ist noch gar nicht einerley. A und A + a können zwar gleich seyn, aber offenbar gar nicht in dem Sinn, in welchem wir z. B. Dreyecke von einerley Grundlinie und Höhe gleich nennen. Denn, wenn man A von A + a abziehe, so bleibe doch noch immer die endliche Größe a übrig. Hier muß ich nun freilich meine Einfalt gestehen, daß ich es mir nie auch nur einmal habe träumen lassen, daß zwischen Gleichheit und Gleichheit noch ein Unterschied Statt finde, und daß nicht nur A, B in einem ganz andern Sinn gleich seyn können, als C, D, sondern daß zwischen der Gleichheit von jenen und der Gleichheit von diesen sogar eine solche Kluft seyn könne, daß, wenn man die erstere mit der andern verwechselte, sie sich sogleich in Unsinn und Widerspruch verwandeln würde. Wenn der Anfänger der Analysis so was hörte, müßte ihm das nicht ungleich anstößiger und abschreckender seyn, als wenn man dem Anfänger der Geometrie sagt: Beim Unendlichen kann, wegen der besondern Natur desselben, auch der Theil dem Ganzen gleich seyn; zumal wenn man ihm dieses erst dann anmerkt, nachdem es bereits geometrisch erwiesen worden? Hr. Eichler macht

zwar gleich darauf wieder die Einschränkung, daß man zuweilen dergleichen Größen, als die obigen A und A + a, nur als gleich ansehe, weil ihr Unterschied in keine Betrachtung kommt, und daß man sie daher nicht mit denen in eine Classe setzen müsse, die einander wirklich (vere) und im arithmetischen Verhältnisse betrachtet gleich sind. Aber was heißt das: der Unterschied zwischen A und A + a kommt in keine Betrachtung? Heißt das nicht eben: die Größe a, um welche sie unterschieden sind, mag an sich oder absolut betrachtet noch so beträchtlich seyn; so ist sie doch im relativen Sinn als Unterschied zwischen der Größe von A und zwischen der von A + a betrachtet völlig Nichts, d. i. die Größe von A ist von der Art, daß diese durch sie gar nicht verändert wird, man mag a zu ihr hinzusetzen oder von ihr wegnehmen. Versteht man nicht dieses darunter, so hat man keine Befugniß, A und A + a als gleich anzusehen. Denn, sind Dinge gleich, so sind sie in Ansehung ihrer Größe einerley, also ist es durchaus widersprechend, zu sagen, daß in Ansehung ihrer Größe ein wirklicher Unterschied dasey, wenn gleich beide Dinge an sich um *a* unterschieden sind. Kurz: wer Dinge gleich nennt, der sagt eben damit, daß ihr Verhältniß allemal ein Verhältniß der Gleichheit ist, dieses mag geometrisch oder arithmetisch seyn. So meynt es doch wol, meinem Bedünken nach, Hr. Hofr. Kästner zuverlässig, wenn er,

wie Hr. Eichler anmerkt, (Analys. des Unendl. §. 113.) sagt, daß die unendliche Subtangente und Abscisse, die um eine endliche Linie verschieden sind, als gleichgroß angesehen werden, weil nemlich (l. c. §. 10.) der Unterschied ihrer Größe verschwindet oder Nichts ist. Daß dieses seine wahre Meinung sey, leidet keinen Zweifel. Denn, wenn er in seiner Fortsetzung der Rechenkunst S. 512. sagt: $y = \frac{1}{0}$ nennt man unendlich, und dieses mit 1 multiplicirt giebt eben so viel, als dazu addirt; so heißt dieses doch wol so viel: $\frac{1}{0} + 1 = \frac{1}{0}$, also gerade das, was ich behaupte. Uebrigens ist die Richtigkeit der Sätze $\infty + a = \infty$, und $\infty^n + \infty^{n-1} = \infty^n$ auch im arithmetischen Verhältnisse, in der ersten Abtheilung so strenge erwiesen worden, daß die ganze Einwendung des Hrn. Eichlers hiedurch schon von selbst wegfällt.

Wenn er aber ferner sagt: daß, wenn man den Grundsatz, das Ganze ist größer als der Theil, bloß auf endliche Größen einschränken wollte, man auch mit eben dem Rechte den Satz umstoßen könnte, daß jede Größe sich selber gleich sey, weil das Endliche zum Unendlichen sich wie Nichts zum Endlichen verhält, und man daher, wie Hr. v. Segner Curs. Math. P. II. §. 589. erinnert, in diesem Sinne alle endliche Größen Nichts nennen könne; so hätte er den Segnerischen Satz ganz anführen sollen: Hoc sensu quantitates finitae quaevis dici possunt nihila:

rela-

relative scilicet, non *absolute*. Denn sagen: a kann im relativen Verstande, d. i. im Verhältnisse gegen eine andere Größe Nichts seyn, heißt doch nicht leugnen: a sey im absoluten Sinne immerfort a oder sich selber gleich. Außerdem aber hätte ihm eben diese Segnersche Stelle, so wie die vorhin angeführte Kästnerische die Nichtigkeit aller seiner Einwendungen zeigen können, da Hr. v. Segner ausdrücklich §. 588. 589. sagt: Ergo tanto *minus* quantitas infinite magna *crescet*, si ad eam accesserit illa, respectu cuius infinite magna concipitur, id est, quaecunque determinata; vel *decrescet*, determinatae alicuius subtractione —. *An minor sit tangens anguli recti, si ab ea radius, vel decuplum aut millecuplum radii subtrahatur?* Habet ergo quantitas finita quaecunque ad infinite magnam, rationem nihili, utpote, *cuius additione vel subtractione haec non magis mutatur, quam quantitas crescit additione nihili, vel decrescit, eius subductione.*

Was endlich den harten Vorwurf betrifft, daß ich in meiner Theorie der Parallelen das Unendliche bloß roh aufgetischt, ohne dasselbe zu erklären, oder es vom Verdachte zu befreien, ob es nicht vielleicht eine bloße Chimäre, ein $\sqrt{-c^2}$ sey — so wird Hr. Eichler hoffentlich aus der gegenwärtigen Schrift urtheilen können, ob dieses aus Unwissenheit geschehen, oder ob ich etwa anderweitige Gründe gehabt haben müsse,

meinen geringen Vorrath von Kenntnissen nicht auf einmal zu Markt zu bringen. Seine übrigen Einwendungen, so fern sie von Wichtigkeit sind, habe ich bereits §. 17. beantwortet, außer der S. 19. aufgeworfenen Frage: unter welcher Gestalt man sich die Winkelfläche vorzustellen habe, deren Beantwortung er aber weiter unten finden wird.

§. 45.

Hr. Hofr. Karsten fängt die Prüfung des Satzes: daß (Fig. 3.) die Fläche AQJ=CgJ, und daher ACgQ gegen beide ein völliges Nichts sey, a. a. O. §. 54. S. 174. also an: „Wenn ich „gegen Hr. Schulze so schließen wollte, so hätte „ich den stärksten Verdacht gegen mich, daß es „Chikane, gänzliche Verdrehung des Sinnes „sey, in welchem der 1. Lehrsatz sey bewiesen „worden„. Chikane, Verdrehung des Sinnes? Nun das war wol meine Sache nie. Und gegen wen hätte ich mich eines solchen Vergehens schuldig machen sollen, da ich hier noch mit keinem Gegner in der Welt zu thun hatte? Also hätte ich dasselbe doch nur gegen mich selbst ausüben können, und dann wol bloßes Mitleid verdient *). Unsterblicher Segner! so war es denn auch

*) Irren, Fehlschließen — dies hätte ich wol können, denn ich bin ein Mensch. Aber diese Ausdrücke waren für das Verbrechen, die wahre Theorie der Pa=

auch Chikane und Verdrehung des Sinnes deiner eigenen vorhergehenden Sätze, da du die kurz vorher angeführte Stelle niederschriebst?

Parallelen entdeckt und herausgegeben zu haben, vermuthlich zu gelinde. Dieses mußte mit wirklichen Chikanen, mit wahrer Verdrehung meines Sinnes bestraft werden. Es thut mir innigst wehe, dieses sagen zu müssen. Aber man gehe die ganze Karstische Beurtheilung meiner Theorie unparteyisch durch, man sehe, wie herrlich schon der ganze Eingang dazu §. 52. ist, und wie hier schon zum voraus der Stab über mich gebrochen, und das completteste Auto da fe wider mich veranstaltet wird. Man sehe, wie er schon §. 54. mit der unerhörtesten Verdrehung des Beweises meines ersten Lehrsatzes noch nicht einmal zufrieden ist, sondern sogar eine Beweisform, die sich gar nicht strenger und evidenter denken läßt, bloß weil sie von der seinigen nur einigermaßen abweicht, aufs niedrigste heruntersetzt: „Bei andern Geometern, (d. i. bei Hr. Karsten) „welche eben das vortra„gen, leuchtet mir alles weit besser ein: ich finde „auch nicht, daß hier mehr bewiesen sey, als was „in allen guten Lehrbüchern weit deutlicher und „(NB.) richtiger bewiesen ist. — Der Beweis „bei andern Geometern (wieder bloß bei Hr. Karsten, denn Segner und Kästner z. B. verfahren so nicht) „ist sehr scharf und einleuchtend, wenn „sie schließen u. s. w.„ — aber auch hieran sich noch nicht begnüget, sondern beim Beweise des 2ten Lehrsatzes wieder sogleich §. 55. in eben dem Ton fortfährt: „Alles dieses steht wiederum in „jedem Handbuche der Geometrie, und was in die-

Und nun laßt uns doch sehen, welches dann außer dem schon widerlegten allgemeinen Einwande, daß unendliche Größen sich gar nicht vergleis

„sem Beweise liegt, das muß in einer verständ„lichen geometrischen Sprache so lauten —„ und so auch noch beim dritten und vierten Lehrsatze damit endigt: „Bei andern Schriftstellern erschei„nen diese ersten 4 Lehrsätze in einem ganz an„dern Lichte. Die Sätze n. 3. 4. trägt man „zuerst vor —„. Man sehe, wie er weiterhin bis §. 73. durchweg bei jedem folgenden Satze sich im gleichmäßigen Betragen noch immer mehr zu übertreffen sucht. Dann sehe man noch §. 74. 75. sein halbes Duzend Parodieen, die meine drei Beweisarten vollends lächerlich machen sollen, und zuletzt §. 76. das den Eingang und die Abhandlung selbst noch übertreffende feine Ende. Endlich suche man doch nur eine einzige Zeile auf, aus welcher derjenige, der meine Theorie noch nicht gelesen, muthmaßen könnte, daß von dem ihr so wiederholentlich abgesprochenen gesunden Menschenverstande doch wenigstens noch eine kleine Spur in ihr vorhanden seyn, und daß sie doch wol noch einiges enthalten könnte, weshalb sie noch werth wäre, gelesen zu werden. Und wenn man nun das so behandelte Buch selbst nur einer flüchtigen Uebersicht würdigt, und theils mein Verfahren in Beurtheilung anderer und Hr. Karstens selbst betrachtet, theils die auf jeder Seite sichtbare Mühe ansieht, die ich angewandt habe, die Strenge und Gründlichkeit überall aufs höchste zu treiben; denn sage man unparteyisch, ob dasselbe wol ärger hätte gemißhandelt, und jedermann von Anschaffung und Lesung

gleichen lassen, die so wichtigen Gründe sind, aus denen Hr. Karsten die Ungereimtheit des Satzes, von dem jetzt die Rede ist, so klar und unumstößlich erwiesen hat?

Zuerst greift Hr. Karsten meinen Beweis des Satzes an, daß (Fig. 4.) der Winkel NLB > NKB sey. Er meynt, nach der Art zu schließen, wie ich hier §. 40. geschlossen, könne er auch beweisen, daß (Fig. 3.) auf FJ keine gleiche Winkel QAJ, gCJ möglich seyn. Er schließt a. a. O. §. 58. so: Wenn gCJ = QAJ ist; so sind AQ, Cg parallel. Also kann unmöglich gCJ = QAJ angenommen werden. Denn da die Winkelfläche AQJ aus der Winkelfläche CgJ und der unbegrenzten Fläche ACgQ besteht; so ist AQJ > CgJ, folglich QAJ > gCJ. Allein, wie wenig diese Art zu schließen derjenigen ähnlich ist, deren ich mich §. 40. bedient habe, ist leicht einzusehen. Denn dort schloß ich, daß (Fig. 4.) die Winkelfläche LAG > KAD sey, daher, weil jene außer dem Stücke KLHD noch die beiden Winkelflächen KAD und LHG enthält, und daß zwey Winkelflächen größer als eine von ihnen sind, habe ich §. 39. erwiesen, und ein Mathematiker, wie Karsten, hätte es schon leicht übersehen können,

Lesung desselben wol stärker hätte abgeschreckt werden können, und ob also eine solche Mißhandlung desselben wol eine Beurtheilung sey, die eines Mathematikers, und zwar eines Mathematikers von so hohem Range, eines Karsten würdig ist.

nen, daß dieses für den, der etwa daran zweifeln wollte, sich aus dem Satze: gleiche Winkel haben gleiche Flächen, ohne Mühe herleiten ließ. Allein, sein Schluß ist von ganz anderer Art. Denn da er annimmt, daß der Winkel QAJ = gCJ ist; so muß er ja, nach dem ersten Lehrsatze meiner Theorie der Parallelen, auch annehmen, daß die Fläche AQJ = CgJ, d. i. CgJ + ACgQ = CgJ ist. Was berechtigt hier also Hr. Karsten, zu schließen, daß CgJ + ACgQ > CgJ ist, da die Unrichtigkeit dieses Schlusses schon aus meinem ersten Lehrsatz klar ist? Leugnet er aber diesen, dann ist ja die ganze Künsteley unnütz; denn, wäre dieser nicht allgemein wahr, so wäre es ja auch der nicht, daß eine größere Winkelfläche zu einem größern Winkel gehöret, also wäre ja mein Beweis §. 40. schon an sich ungereimt, ohne daß man dieses erst durch solche Umwege zeigen dürfte.

Von eben diesem Werth ist auch der zweite Schluß des Hr. Karsten §. 65: Wenn AQ, Cg parallel sind; so ist die Winkelfläche CgJ ein Theil der Winkelfläche AQJ, also die erste kleiner, als die letzte, folglich auch der Winkel gCJ < QAJ. Denn die Folge: CgJ < AQJ, beweist er aus dem 9ten Grundsatze des Euklids, der so lange gelte, bis bewiesen ist, daß der Nebentheil ACgQ = 0 sey, ein Nebentheil, der gleichwol unendlichgroß ist Allein, da der Satz, daß gleiche Winkel gleiche Flächen haben, allgemein wahr ist, und

man

man nach dem 23sten Satz des Euklids den Winkel gCJ = QAJ machen kann; so kann auch die Fläche CgJ = AQJ, d. i. der Theil dem Ganzen gleich, und daher sein Nebentheil ACgQ, so unendlichgroß er auch ist, im Verhältnisse mit ihm verschwinden d. i. = 0 werden. Also ist ja schon hiedurch erwiesen, daß der 9te Grundsatz des Euklids bei unendlichen Größen nicht gilt, sondern hier ganz unbrauchbar ist. Und hiedurch ist auch zugleich die Richtigkeit dessen erwiesen, was Hr. Karsten §. 67. erinnert.

Drittens sagt er §. 68: „die Folge, weil „die Fläche CgJ = AQJ ist, so sey ACgQ = 0, „wird jeder für unmöglich halten, der sie nicht „wegen anderer vorgefaßter Begriffe schon zum „voraus als richtig angesehen hat, zumal wenn „er bedenkt, daß diese Folge nicht allein richtig „seyn müßte, wenn AJ in einer Zeichnung auf „dem Papier einen oder wenige Zolle lang ist, „sondern auch alsdenn, wenn gleich AJ eine „Länge von Centillionen Erdbahn-Durchmessern „hätte.„ Und §. 69. fährt er fort, die Uebersetzung jenes Satzes in die algebraische Sprache wäre diese: „$\infty^m = \infty^m + \infty$. Welcher mathematische Schriftsteller von Leibnitzen bis auf „Eulern giebt nun Hr. Schulze die Erlaubniß, „weiter zu schließen: also ist $0 = \infty$?„ Wenn man hier eine absolute Null verstünde, so wäre ein solcher Schluß freilich Unsinn, und daß also derjenige, welcher so schließt, nicht, wie Hr. Karsten

sten §. 68. zu fordern scheint, erst nöthig habe, zu beweisen, daß hier das Nichts kein absolutes sey, ist für sich klar, weil der Satz $\infty^m = \infty^m + \infty$ ja schon an sich sagt, daß ∞ hier nicht an sich, sondern in Verbindung mit ∞^m betrachtet werde, und daher bloß im Verhältnisse gegen ∞^m Nichts sey, weil ∞^m durch ∞ gar nicht vergrößert wird. Nimmt man aber die Sache in diesem wahren Sinne; so ist ihre Richtigkeit im Vorhergehenden ins vollkommenste Licht gesetzt, und wider alle weitere Einwürfe gesichert worden. Daß übrigens Hr. Karsten meynt, Centillionen Erdbahn-Durchmesser hätten gegen eine unendliche Linie ein größeres Verhältniß, als eine Linie von 1 Zoll, würde theils voraussetzen, daß nicht $\frac{1}{\infty} = 0$ wäre, weil sonst auch $\frac{a}{\infty} = 0$ bleiben müßte, wenn gleich a jene Centillionen und noch mehr bedeutete; theils, daß man am Ende von Centillionen Erdbahn-Durchmessern der Grenze der unendlichen Linie, die nach dieser Seite keine Grenze hat, schon um ein vieles näher gekommen wäre.

Viertens sagt Hr. Karsten §. 70.: was ich eigentlich hätte beweisen müssen, wäre die Gleichung $\frac{ACgQ}{CgJ} = 0$, hiezu aber würde erfordert,

daß

daß man sich CgJ und ACgQ als Parallelogrammen vorstellete, und so würde die Theorie der Parallelen, die erst gebaut werden sollte, schon vorausgesetzt. Allein, daß man jene Gleichung auch ohne diese Vorstellung richtig beweisen könne, habe ich schon §. 43. gezeigt, und daß sie in Ansehung der Winkelfläche CgJ so gar falsch sey, werde ich unten zeigen *).

§. 46.

Wenn in einer Ebene die geraden Linien AC, JG (Fig. 7.) von einer dritten MB in A und J so geschnitten werden, daß der äußere Winkel GJB größer ist, als der entgegengesetzte innere CAB; so stoßen sie verlängert nach C, G hin nothwendig zusammen. — Denn da der Winkel GJB > CAB ist; so ist auch die Winkelfläche JGB

*) Dieses sind nun nebst den schon im Vorhergehenden widerlegten die wichtigen Karstenschen Einwürfe, die man mit ihm für ganz unwiderlegbar ausgegeben, und die selbst auf einen Hindenburg so stark gewirkt haben, daß er nicht nur in den richtigen Begriffen, die er in seiner Recension in der A. L. Z. mit so viel Ueberzeugung und Freimüthigkeit äußerte, wankend geworden zu seyn scheint, sondern sogar den Ton, der ihn so liebenswürdig und schätzbar macht, zu meiner nicht geringen Befremdung im dritten Stück des Leipz. Mag. 1786. S. 394 - 396. auf einmal so sehr zu verändern angefangen, daß ich den Recensenten meiner Theorie in der A. L. Z., für den er sich selbst erklärt, hier fast verkennen würde.

JGB > ACB (§. 38.). Gesetzt nun, JG stieße niemals mit AC zusammen; so wäre die Winkelfläche JGB ein Theil von der Winkelfläche ACB, folglich der Theil größer, als das Ganze, welches ungereimt ist.

§. 47.

Da ein strenger Beweis dieses Satzes gerade das einzige ist, was noch zur vollkommenen Theorie der Parallellinien vermißt wurde; so wird es vorzüglich nöthig seyn, auch noch diejenigen Einwendungen zu beantworten, die wider den gegebenen Beweis insbesondere gemacht worden. Dasjenige, was Hr. Eichler l. c. pag. 8. 9. hiewider beibringt, wurde schon in der A. L. Z. erinnert, und ist bereits in meiner Darstellung S. 18. f. umständlich beantwortet worden; was er aber pag. 10. von der Fläche der Hyperbel anführt, gehört in die höhere Geometrie des Unendlichgroßen, und kann daher erst in dieser beantwortet werden.

Hr. Hofr. Karsten hat auch hier außer der gewöhnlichen Einwendung, daß unendliche Größen sich nicht vergleichen lassen, noch verschiedene andere gemacht. Erstlich sagt er a. a. O. §. 60: wenn mein Satz, daß ein größerer Winkel auch allemal eine größere Fläche habe, richtig ist, so könne er das ganze Argument umkehren, und beweisen, daß es unmöglich sey, anzunehmen: es könne GJB > CAB seyn. Er schließt

so: die Fläche ACB besteht aus der Fläche AJGC und GJB, folglich ist ACB > GJB, also auch CAB > GJB. Allein, was ist das hier für eine Fläche AJGC, von welcher Hr. Karsten redet? Soll das wahr seyn, daß die unendliche Fläche ACB aus ihr und aus der Fläche JGB besteht; so muß sie zwischen AC und JG ohne Ende fortgehen, folglich muß JG die Linie AC niemals schneiden. Denn, schnitte sie dieselbe, so låge ja offenbar von der Winkelfläche JGB noch ein unendlicher Theil jenseits des Durchschnitts außerhalb ACB. Soll also die Annahme des Hr. Karsten, daß ACB aus AJGC und GJB besteht, nicht ungereimt seyn; so muß die Unmöglichkeit des Schneidens der Linien JG und AC, wenn GJB > CAB ist, entweder schon an sich klar seyn, oder es liegt ihm schlechterdings ob, dieselbe zu beweisen. Nun aber ist sie an sich so wenig klar, daß sie vielmehr dem elften Grundsatz des Euklids schnurstracks widerspricht. Also ist Hr. Karsten, wenn seine Annahme und mithin sein ganzer Gegenbeweis nicht ungereimt seyn soll, schlechterdings verpflichtet, die Unmöglichkeit des Schneidens der Linien JG und AC zu beweisen. Aber dieses beweisen zu wollen, kann wol niemanden einfallen. Also ist im vermeinten Gegenbeweise des Hr. Karsten schon der erste Satz, mithin auch der ganze Gegenbeweis ungereimt. Was soll man nun dazu denken, wenn Hr. Karsten denselben doch als richtig ansieht, und sogar

also fortfährt; „Will Hr. Schulze erwidern, „zur Winkelfläche GJB gehöre noch ein großes „Stück jenseit AC —; so antworte ich, das „sey gerade das, was allererst erwiesen wer„den sollte. Man kann nicht wissen, ob jen„seits AC noch etwas zur Winkelfläche BJG ge„hört, bevor man weiß, daß JG und AC ein„ander schneiden, und gerade das sollte bewie„sen werden!„ Vortrefflich! Aber es wird mir doch auch erlaubt seyn, folgendes zu antworten. Um einzusehen, daß Hr. Karstens Gegenargument kein Argument sey, hat 1) niemand nöthig zu beweisen, daß JG, AC einander schneiden, sondern Hr. Karsten liegt es ob, weil sein erster Satz ihr Nichtschneiden schon voraussetzt, zu beweisen, daß sie sich nicht schneiden. 2) Daß diese Linien, wenn GJB > CAB ist, sich nothwendig schneiden, hat bisher jeder Mathematiker dem Euklides, der es als Grundsatz angenommen, ohne allen Beweis auf sein bloßes Wort geglaubt. Da es also allgemein angenommene Wahrheit ist, so liegt es Hr. Karsten ob, sie zu widerlegen, und zu zeigen, daß Euklids eilfter Grundsatz falsch ist. 3) Daß aber Hr. Karsten gerade von mir den Beweis fordert, daß JG, AC einander schneiden, ist noch seltsamer; denn, wenn er annimmt, die Fläche ACB bestehe aus AJGC und JGB; so nimmt er, wie vorhin gezeigt worden, eben dadurch an, JG schneide nicht AC. Nun aber hatte ich ja eben

bewie-

bewiesen, daß JG nothwendig AC schneidet. Wie kann er also fordern, ich soll dieses noch einmal beweisen, bevor er meinen bereits gegebenen Beweis umgestoßen? Dieser aber soll ja eben hier erst durch gedachte Annahme umgestoßen werden. Also liegt es ja ihm ob, zu beweisen, daß seine Annahme Grund hat, d. i. daß JG und AC einander nicht schneiden. 4) Das aber geht über alles, daß Hr. Karsten dieser Forderung sogar die Wendung giebt, daß er zweymal nach einander sagt: wollte ich erwidern, JG und AC schneiden sich, so wäre dieses gerade das, was allererst bewiesen werden sollte; da hier doch gar nicht einmal die Erwiderung nöthig ist, daß sie sich schneiden, sondern nur, daß sie sich vielleicht schneiden können, außerdem aber jeder anderer Mathematiker, eben so gut als ich, Hr. Karstens Annahme, daß JG und AC sich nicht schneiden, ohne allen weitern Beweis schon nach dem elften Grundsatze Euklids für falsch erkennen muß. Wie war es möglich, daß ein Karsten so wider alle Logik verstoßen konnte? Was würde er mit mir angefangen haben, wenn er eine solche Art zu argumentiren in meinem Büchlein gefunden hätte?

Zweitens sagt er §. 61, wenn ich schließe: gesetzt JG, AC schnitten einander nicht, so wäre die Winkelfläche JGB ein Theil von ACB; so hieße dieses in die richtige geometrische Sprache übersetzt: „*JG* würde auch zwischen *AC* und

„ *AB* liegen bleiben, wenn man *J* auf *A* und *JB* „ an *AB* anlegte. Wie folgt das? und wie „ kann man also weiter schließen: also wäre der „ Winkel GJB nur ein Theil von CAB?„ In einer richtigen Uebersetzung ist die Folge diese: Ist JGB ein Theil von ACB; so kann nicht JGB > ACB seyn; wenn man also J auf A und JB an AB anlegt, so kann nicht JG außerhalb ACB z. B. in AF liegen; denn da gleiche Winkel gleiche Flächen haben, so wäre, wenn FAB = GJB wäre, die Fläche AFB = JGB, folglich JGB > ACB. Also kann nicht der Winkel GJB > CAB seyn, wie es doch die Bedingung des Satzes fordert.

Drittens meynt Hr. Karsten §. 63, auf die Art, wie ich den elften Grundsatz Euklids bewiesen habe, auch beweisen zu können, daß, wenn (Fig. 3.) gCJ = QAJ ist, Cg und AQ gleichfalls zusammenstoßen müssen, weil, wenn sie nicht zusammenstießen, die Fläche CgJ ein Theil von AQJ, und ihr doch gleich seyn müßte, folglich der Theil dem Ganzen gleich wäre, dem 9ten Grundsatz beim Euklides entgegen. Allein, da gleiche Winkel allemal gleiche Flächen haben; so folgt eben hieraus, daß der Theil CgJ dem Ganzen AQJ wirklich gleich sey, und daher Euklidens 9ter Grundsatz beim Unendlichen gar nicht gilt. Ueberhaupt aber wunderts mich, wie Hr. Karsten dieses Gegenargument hat vorbringen können, wofern es ihm nicht mehr um die auffallende Zahl seiner Einwendungen, als um ihr

Gewicht zu thun war. Denn ich hatte ja in meiner Theorie der Parall. S. 78. dieses ganze Gegenargument schon selbst umständlich vorgetragen und widerlegt. Doch, Hr. Karsten macht hier noch eine Nacherinnerung. Ich hatte in meiner Theorie S. 79. den Ausdruck gebraucht: die Fläche CgJ (Fig. 3.) scheine nur ein Theil von AQJ zu seyn. Hier konnte doch wol ein jeder sehen, daß ich durch diesen freilich nicht ganz gut gewählten Ausdruck nur so viel sagen wollte: die Fläche CgJ scheine kleiner zu seyn, als AQJ. Dem ungeachtet mißbraucht Hr. Karsten das Wort Scheinen, um §. 64. zu fragen: Warum scheint es hier nur zu folgen, da doch (Fig. 7.) geradezu geschlossen wird: wenn JG, AC sich nicht schnitten, so wäre JGB ein Theil von ACB? Das heißt doch wol, meine Meinung mit Fleiß nicht verstehen wollen!

Viertens meynt er §. 63, wenn der Nebentheil gegen das Ganze Null seyn kann; so hätte doch bewiesen werden müssen, daß zwar (Fig. 3.) ACgJ gegen das Ganze AQJ Null, aber (Fig. 7.) AJGC gegen das Ganze ACB nicht Null sey, wenn man beidemal voraussetzt, daß die Linien sich nicht schneiden. Allein, das erstere habe ich aus der Gleichheit der Winkel bewiesen, das letztere aber ist nicht nöthig zu beweisen; denn, will Hr. Karsten annehmen, daß AJGC gegen ACB Null sey, so ist die Fläche JGB = ACB, folglich auch der Winkel GJB = CAB, da doch der

Voraussetzung gemäß GJB > CAB ist. Also ist ja in diesem Fall mein Beweis ohnehin richtig, und Hr. Karsten hat daher nicht bedacht, daß er hier den Beweis einer Sache fordert, die niemand leugnen kann, ohne gerade dadurch die Richtigkeit meines §. 46. gegebenen Beweises zu bestätigen.

§. 48.

Nunmehr habe ich alle Einwendungen, die mir sowol wider die Lehre von den Winkelflächen überhaupt, als auch wider meinen Beweis des elften Euklideischen Grundsatzes insbesondere bekannt geworden, sorgfältig beantwortet, und jeder Unparteyische kann nun urtheilen, auf welcher Seite die Wahrheit liegt. Zuerst ist sichtbar, daß sie alle insgesammt bloß darauf hinauslaufen: der Parallelstreifen ACgQ (Fig. 3.) könne nicht gegen die Winkelfläche CgJ verschwinden, sondern müsse sie nach dem 9ten Grundsatze Euklids durch Addition nothwendig vergrößern und durch Subtraction vermindern. Dieses ist auch ganz natürlich. Denn, wäre jene Behauptung richtig, und daher der 9te Grundsatz Euklids auch aufs Unendliche anwendbar, so wäre es offenbar ungereimt, meine Theorie vertheidigen zu wollen. Ist jene aber unrichtig, und verschwindet ACgQ gegen CgJ wirklich; so ist es auch eben so ungereimt, diese bestreiten zu wollen, weil in diesem Fall die Allgemeinheit

des

des Satzes: gleiche Winkel haben gleiche Flächen, vor sich klar ist, woraus dann alles übrige von selbst folgt.

Ferner ist sichtbar, daß alle die ungereimten Sätze in den vermeinten Gegenargumenten, die man wider mich aufstellt, jedesmal bloß dann folgen, wenn man den 9ten Grundsatz Euklids zum Grunde legt, und annimmt, daß AQJ > CgJ sey. Läßt man dagegen jenen Grundsatz hier ungebraucht, und nimmt man an, daß AQJ = CgJ sey; so folgen aus dieser Annahme überall lauter richtige Sätze. Hätte also nicht schon dieser sichtbare Umstand einen jeden aufmerksam machen und ihn wenigstens zur Nachfrage erwecken müssen: ob ein Satz, aus welchem lauter Wahrheiten folgen, dessen Gegentheil aber auf lauter Ungereimtheiten führt, sich nicht schon eben dadurch als Wahrheit zu erkennen giebt? Urtheilt man nicht so in jedem andern Falle? Urtheilte man nicht in der Art vormals selbst in Ansehung der Analysis des Unendlichen, obgleich man ihre wahren Gründe noch nicht einsahe, oder wenigstens über dieselben noch uneins war? Hätte also ein Mathematiker, wie Hr. Karsten, sich nicht wenigstens etwas bedenken sollen, einen solchen Satz, und um desselben willen alle die Sätze, auf welchen er beruht, und die aus ihm folgen, nicht nur als geometrisch, sondern sogar als algebraisch falsch, ja als Unsinn und allen gesun-

den Menschenverstand beleidigend zu verschreyen? Doch, hierüber ist ein so unfehlbarer Mann hinweg. Beweisarten von solchem Schlage, als ich sie gegeben habe, hat er zu Dutzenden vorräthig, und zwar solche, die nicht, wie die meinigen, selbst nach den Grundsätzen der Rechnung des Unendlichen falsch, sondern diesen ganz gemäß und in so fern richtig sind, nur daß ihnen nicht der Rang geometrischer Beweise zukommt. Zur Probe hat er §. 75. wenigstens ein halbes Dutzend hergesetzt, damit nicht etwa ein anderer darauf kommen, sie als eine neue Erfindung ansehen und auch andere sie dafür anzusehen verleiten möchte. Nur Schade ist es, daß gerade hier nicht nur alle angeführte Figuren, die zu denselben gehören sollen, außer der 14ten, unrichtig sind, sondern auch von allen übrigen Figuren keine einzige zu denselben paßt. Wie dieses zugegangen ist, ist mir unerklärbar. Wenigstens hat dieses doch denen, die sie auf Treue und Glauben annehmen mußten, dazu dienen können, eine desto höhere Meinung von denselben zu fassen, und meine armselige Theorie desto mehr zu bemitleiden. Damit also für diese die sechs wichtigen Entdeckungen doch nicht so gut als verlohren seyn möchten, habe ich die dazu gehörigen Figuren hier beigefügt, und zugleich den richtigen Sinn dieser Beweisarten durch kurze Einschaltungen angezeigt.

Erste

Erste Karstensche Beweisart.

Grundsatz. Wenn durch A und C (Fig. 8.) die geraden Linien AE, CD parallel gezogen werden, so schneiden sie einander in einem unendlich weit entfernten Punkt, (d. i. in einem solchen, der ein Unding ist, erste Abth. §. 9. n. 1, mithin ist ihr Schneiden ein Widerspruch).

Zusatz. Also entstehet aus AC, AE, CD ein geradlinichtes Dreyeck, dessen Spitze von AC unendlich weit entfernt ist, (d. i. ein Dreyeck, das keine Spitze hat, und ein Unding, ein Widerspruch ist, erste Abth. §. 9. n. 2.).

Lehrsatz. Wenn der Winkel FAB > FCD ist, so wird CD von AB geschnitten.

Beweis. Man mache FAE = FCD, so ist AE parallel mit CD, also wird ACDE ein Dreyeck, dessen Seiten AE, CD sich im unendlich weit entfernten Punkt schneiden (d. i. ACDE wird kein Dreyeck und hat keine Spitze), und AB liegt innerhalb der Grenzen dieses Dreyeckes, (das kein Dreyeck ist): also wird CD von AB geschnitten, (d. i. weil AE, CD niemals zusammenkommen und kein Dreyeck machen, sondern die Fläche zwischen ihnen immer offen bleibt; so kann AB nicht immerfort innerhalb dieser Oeffnung bleiben).

Zweite Karstensche Beweisart.

Wenn wie vorhin FAB > FCD ist, so wird CD von AB geschnitten.

Beweis. Man ziehe CG mit AB parallel, so schneiden AB, CG einander in einem unendlich weit entfernten Punkt (d. i. gar nicht). Weil nun AB an der einen Seite, CG aber an der andern Seite von CD liegt, und der Durchschnittspunkt dieser beiden geraden Linien an der Seite von CD zu finden seyn muß, wo CG liegt (d. i. nirgends ist); so erhellet, daß auch CD von AB geschnitten werde, (d. i. AB schneidet CD, weil von der Linie AB zwar ein Punkt A auf der linken Seite von CD, aber keiner von ihr auf der rechten Seite von CD liegt).

Dritte Karstensche Beweisart.

Grundsatz. Von einem Punkt A (Fig. 9.) nach einem andern B kann nur eine und eben dieselbe gerade Linie laufen.

Zusatz. Also auch alsdenn nur, wenn B von A unendlich weit entfernt ist, (d. i. wenn B ein Unding ist, 1. Abth. §. 9. n. 1.).

Lehrsatz. Durch einerley Punkt A können nicht zwey verschiedene gerade Linien AB, AC mit einer dritten parallel laufen.

Beweis. Es sey E von D unendlich weit entfernt (d. i. E sey ein Unding), so laufen AB, AC beide durch E, wenn sie beide mit DE parallel

rallel sind: also fallen sie in einerley geraden Linie zusammen, (nemlich weil sie beide auf AD mit DE ein Dreyeck ADE machen, das ein Unding ist, und daher durch einen Punkt E gehen, der gleichfalls ein Unding ist).

Vierte Karstensche Beweisart.

Wenn zwo gerade Linien CD, CF einander schneiden, und selbst von einer dritten in D, F (Fig. 10.) geschnitten werden, so können sie diese nicht unter gleichen übereinstimmig liegenden Winkeln schneiden, weil allemal AFC > ADC ist (Euklids 16. Satz).

Zusatz. Also können CD, CF die dritte AB auch nicht unter solchen Winkeln schneiden, wovon jeder = o ist, (ganz gewiß nicht, denn, wenn AFC und ADC beide = o sind; so liegt DC in DA, und FC in FA).

Lehrsatz. Wenn AB, CD (Fig. 11.) parallel sind, und von EF in G und H geschnitten werden, so ist EGB = EHD.

Beweis. Wenn EGB nicht = EHD ist, so mache man EGL = EHD. Alsdenn ist GL sowol als GB mit CD parallel, mithin schneiden beide die gerade Linie (CD) unter solchen Winkeln, wovon jeder = o ist (nicht richtig, sondern ihr Durchschnittspunkt ist ein Unding, und daher auch jeder von beiden Winkeln ein Unding, nemlich ein Winkel, der keinen Scheitel hat) gegen den Zusatz des vor. Lehrsatzes. (Dieser gehöret

höret nicht hieher, denn sonst müßte Euklids 16. Satz so heißen: wenn CD, CF (Fig. 10.) die Linie BA unter solchen Winkeln schneiden, die Undinge sind; so ist das eine Unding größer, als das andere, und denn würde der vorige Zusatz den Sinn haben: Also können in diesem Falle die beiden Undinge nicht gleich seyn).

Fünfte Karstensche Beweisart.

Wenn (Fig. 12.) CD, EF verlängert mit AB unter gleichen Winkeln zusammen laufen (d. i. wenn FEB = DCB ist), so sind sie parallel (Euklids 28. Satz).

Zusatz. Also ist auch CD mit EF parallel, wenn AB von beiden unter einem Winkel = o geschnitten wird. (Diese Folge ist falsch; denn, sind die Winkel FEB, DCB beide = o, so liegt EF in EB und CD in CB, folglich in einer und derselben Linie, also können sie nicht parallel seyn).

Lehrsatz. Zwey gerade Linien CD, EF, (Fig. 13.) die beide mit einer dritten AB parallel laufen, sind unter sich parallel.

Beweis. Denn CD und EF schneiden nun beide die dritte AB unter einem Winkel = o (nicht wahr, sondern unter einem Winkel, der ein Unding ist, weil sein Scheitel ein Unding ist), also ist CD mit EF parallel, nach dem Zusatz des vor. Satzes (der, wie gezeigt, schon an sich falsch ist).

Sechste Karstensche Beweisart.

1. Lehrsatz. Zwey Parallellinien AB, CD (Fig. 14.) ins Unendliche nach beiden Seiten verlängert, begrenzen eine ebene zweyseitige Figur von allen Seiten.

Beweis. Denn sie stoßen auf beiden Seiten im unendlich weit entfernten Punkt zusammen.

Anmerkung. Zwey endliche Parallellinien können das freilich nicht: nach Euklids 12. Grundsatz, wol aber zwey unendlichgroße. Das endliche Ganze kann ja auch seinem Theile nicht gleich seyn, wol aber, wenn es unendlichgroß ist. (Soll ich hievon auch den wahren und eigentlichen Sinn zeigen? Nein! hiezu ist mir die Ehre eines Karsten zu theuer. Hier breche ich ab, und wem daran gelegen ist, den 2ten Lehrsatz, der auf den ersten gebaut ist, auch zu verstehen, der kann sich dazu meiner 14. Figur bedienen.)

Hier ist dann auch das halbe Dutzend Beweisarten, das Hr. Karsten meinen einzelnen dreyen zu Ehren aufgestellt hat. Ein jeder wird nun von ihrer Aehnlichkeit mit den meinigen ohne Mühe urtheilen können. Sie gehen alle von dem Satze aus, daß zwo Parallellinien einander in einem unendlich weiten Punkte schneiden, in diesem einen Winkel = o, und daher auf der Durchschnittslinie ein Dreyeck machen, dessen Spitze unendlich weit entfernt ist. Daß nun dieser Satz an sich widersprechend und Unsinn sey,

ist

ist aus der ersten Abth. §. 9. n. 1. 2. 3. klar. Da aber Hr. Karsten ihn doch für algebraisch richtig erklärt, so wollen wir doch sehen, wie es um ihn steht, wenn man ihn als algebraische Fiction betrachtet. Wenn ein paar Linien einander immer mehr nähern, je weiter man sie verlängert; so kann der Analyst sich allerdings dieselben als solche imaginiren, die in einer unendlichen Weite zusammenkommen würden, weil ihre Weite von einander bis zu 0 abnehmen kann. Der Sinn dieser Fiction ist in solchem Fall bloß hypothetisch, und dieser: wäre ein unendlich weit entfernter Punkt kein Unding, sondern was mögliches, so müßte man auch annehmen, daß sie in demselben wirklich zusammenliefen; daß sie sich aber, wie Hr. Karsten annimmt, schneiden sollten, bliebe auch selbst in diesem Zustande eine ungereimte Vorstellung, weil man Linien, die man sich als bereits ohne Ende fortgegangen vorstellt, nicht mehr als einer weitern Verlängerung fähig ansehen kann. So ist in der Gleichung $tu = 1$ für die asymptotische Fläche der gleichseitigen Hyperbel, $u = \frac{1}{t}$. Je größer also die Asymptote t wird, desto kleiner wird ihre Weite u von der Hyperbel; und setzt man $t = \infty$, so wird $u = \frac{1}{\infty} = 0$. Hier kann also der Analyst sich mit Recht imaginiren: die Asymptote

komme

komme mit der Hyperbel in einer unendlichen Weite zusammen. Denn damit sagt er nichts weiter, als: dieses würde wirklich geschehen, wenn eine unendliche Weite nicht ein Unding, sondern möglich wäre. Allein, wenn ein paar Linien immerfort einerley Weite behalten, folglich ihre Weite von einander einer beständigen Größe a gleich ist; so ist für sich klar, daß es ungereimt ist, ihre Weite von einander unter irgend einer Bedingung auch nur in der Imagination = o zu setzen. Wollte man sich also durch eine algebraische Fiction diese Linien gleichfalls als solche vorstellen, die in einer unendlichen Weite zusammenkommen; so wäre diese Fiction sogar in dem hypothetischen Sinne: wenn eine unendliche Weite kein Unding wäre, so würden die beiden Linien in dieser zusammenlaufen, wahrer Unsinn. Will also Hr. Karsten bei seinem halben Dutzend Beweisarten für den elften Grundsatz Euklids den Satz, daß zwey Parallellinien in einem unendlich weit entfernten Punkte zusammenlaufen, auch nur als imaginaire algebraische Fiction betrachtet, zum Grunde legen; so muß er erst beweisen, oder wenigstens schon als gewiß voraussetzen, daß zwey gerade Parallellinien nicht immerfort einerley Weite von einander haben. Nun aber ist, wenn Euklids elfter Grundsatz wahr ist, auch das wahr, daß zwey Parallellinien beständig einerley Weite von einander haben, wie jedem Geometer bekannt ist.

Also

Also muß Hr. Karsten, wenn seine sechs Beweisarten auch nur nach einer imaginairen algebraischen Fiction Sinn haben sollen, erst beweisen, oder schon als gewiß voraussetzen, daß Euklids elfter Grundsatz, den sie demonstriren, falsch sey.

Ich weiß zwar wol, daß manche Analysten, eben so wie Hr. Karsten, sich wirklich die Parallellinien als solche vorstellen, die in einem unendlich weiten Punkte zusammenlaufen. Allein, ich habe dieses immer für diejenige algebraische Sprache gehalten, welche Hr. Karsten die höchst unvollkommene nennt, die nur für empirische Rechner, aber nicht für philosophische gehört, und mir den Grund dieser Vorstellung ungefähr so erklärt. Je weiter der Punkt C, in welchem CD, CF (Fig. 10.) sich schneiden, von D und F weg liegt, desto kleiner wird der Winkel C, und es ist FC : DF = sin. D : sin. C. Zieht man nun FG mit DC parallel; so weiß man aus Euklids 29. Satz, daß C = CFG, folglich FC : DF = sin. D : sin. CFG ist. Je größer also FC gegen DF wird, desto kleiner wird der Winkel CFG gegen D, desto mehr nähert sich also die Linie FC der Linie FG. Setzt man endlich FC = ∞;

so wird $\sin. CFG = \frac{DF \,.\, \sin. D}{\infty} = 0$, folglich

liegt FC in FG, d. i. FC verwandelt sich hier in die Linie FG selbst; also scheint aus der An-

nahme:

nahme: wenn ein unendlich weiter Punkt C möglich wäre, zu folgen, daß alsdenn die Parallellinien FG, DC in demselben zusammenlaufen würden. Allein, man vergißt hiebei nur den kleinen Umstand, daß die Weite CH des Punkts C von FG immerfort dieselbe bleibt, und daher eine beständige Größe ist, so groß auch FC werden mag. Da es nun nach den Regeln der Analysis selbst schlechterdings ungereimt ist, daß eine beständige Größe im absoluten Sinne $= 0$ werden kann, man mag die veränderlichen Größen, dergleichen hier DC, FC sind, noch so klein, oder groß, ja selbst 0, oder unendlichgroß annehmen; so ist klar, daß jene Folge hier keinesweges stattfinde, sondern daß selbst die Annahme: zwey gerade Linien laufen in einem unendlichen Punkte zusammen, eben so viel heißt, als: sie sind nicht parallel, weil sonst in diesem Punkte ihre Weite von einander im absoluten Sinne $= 0$ wäre. Dieses erhellet auch sogleich, wenn man die Weite des Punkts C von FG für den Fall $FC = \infty$ wirklich berechnet. Denn $r : \sin. CFG = FC : CH$. Setzt man nun $FC = \infty$; so wird $\sin. CFG : r = 1 : \infty$, also auch $CH : FC = CH : \infty = 1 : \infty$, folglich $CH = \frac{\infty \cdot 1}{\infty} = 1$. Also ist es selbst für den Fall $FC = \infty$ ungereimt, die Weite $CH = 0$, d. i. DC, FG als zusammenlaufend zu betrachten, und es kann also die Vorstellung, daß zwey

Linien in einem unendlich weiten Punkte zusammenlaufen, nur dann erlaubt seyn, wenn die eine die Asymptote der andern ist. Wenn daher der Analyst zwey Linien CD, CF, die aus einem sehr weit entlegenen Punkte C auf eine dritte Linie DF fallen, welche im Verhältnisse gegen CD und CF sehr klein ist, als parallel betrachtet; so ist er hiezu bloß deshalb berechtigt, weil hier der Winkel CFG gegen GFA so klein ist, daß er, ohne einen Fehler, der in Betrachtung käme, zu besorgen, CFA = GFA annehmen kann. Und wenn er umgekehrt Parallellinien als zusammenlaufende betrachtet; so kann er dies bloß thun, so fern entweder der Sehewinkel CFG, unter welchem uns die Distanz CH der Parallelen DC, FG erscheint, für unser Auge = o wird, wie dieses z. B. der Fall ist, wenn wir am Eingange einer sehr langen Allee stehen, oder so fern man ihre Distanz CH im Verhältnisse gegen CD und CF für unbedeutend hält, d. i. sie als ein relatives Nichts betrachtet.

Gesetzt aber sogar, die gedachte Vorstellung wäre dem Analysten wirklich erlaubt; so wäre er doch, wie gezeigt worden, bloß deshalb dazu berechtigt, weil er aus dem Euklides weiß, daß der Winkel C = CFG ist. Dieser Satz aber setzt schon den elften Grundsatz Euklids voraus. Also würden in diesem Falle alle sechs Beweisarten des Hr. Karsten den Satz, den sie beweisen sollen, bereits voraussetzen. Und so ist zugleich

gleich klar, wie auch aus den ungereimten Prämissen natürlich das wieder folgen muß, was schon in sie hineingelegt war.

§. 49.

Wenn zwo Parallellinien BQ, Eg (Fig. 3.) von FJ in A und C geschnitten werden; so ist der äußere Winkel gCJ = QAJ.

Denn, wäre gCJ > QAJ, so schnitten sich BQ, Eg nach der Seite Qg; und wäre gCJ < QAJ, so wäre FAB > FCE, also schnitten sie sich nach der Seite BE (§. 46.), folglich wären sie in beiden Fällen nicht parallel.

§. 50.

In jedem Dreyecke AHC (Fig. 3.) sind die drey Winkel zusammen so groß, als zwey rechte.

Denn da die Fläche des Winkels AHC = HGQ ist (§. 31.); so sind die Flächen aller drey Winkel = CFG + HGQ + AQJ. Zieht man nun Cg mit AQ parallel; so ist AQJ — AHC — HCgQ = CgJ = AQJ (§. 37.), folglich um so mehr AQJ — AHC = AQJ. Also sind die Flächen aller drey Winkel = CFG + HGQ + AQJ — AHC = CFG + CGJ = der Fläche zweyer rechten Winkel, folglich sind die drey Winkel des Dreyecks zweyen rechten gleich (§. 37.) *).

*) So sehr man billig vermuthen sollte, daß es jedem Freunde der Geometrie angenehm seyn müßte, hier so

§. 51.

Die Fläche eines rechten Winkels BAC (Fig. 15.) ist der vierte Theil der ganzen unendlichen Ebene, worin er liegt.

Denn, da BAC : 360° = 1 : 4 ist, so verhält sich auch die Fläche ABC zur unendlichen Ebene, wie 1 : 4 (§. 36.). Also ist die Fläche des geraden Winkels BAD, der zweyen rechten BAC + CAD gleich ist, die Hälfte der ganzen unendlichen Ebene, folglich wird die ganze unendliche Ebene von jeder nach beiden Seiten B, D ohne Ende fortgehenden geraden Linie BD halbirt.

§. 52.

so unmittelbar wahrzunehmen, wie die Flächen der drey Winkel eines Dreiecks gerade die Fläche zweier rechten Winkel ausmachen; so leicht haben gleichwol meine Beurtheiler auch über diesen Beweis hinweggesehen, bloß weil er voraussetzt, daß die Fläche des Dreiecks AHC die unendliche Winkelfläche AQJ weder vergrößere noch verkleinere, obgleich schon für sich klar ist, daß, da das Endliche zum Unendlichen kein Verhältniß hat, die Fläche AHC schon gegen die Fläche ACgQ, also um so mehr gegen die Winkelfläche AQJ verschwinden müßte. Allein auch diese vermeinte Schwierigkeit ist bereits gehoben, da Hr. Gensichen in seiner Bestätigung der Schultzischen Theorie ꝛc. 1786. S. 26. 27. gezeigt hat, wie sich der Beweis nach drei verschiedenen Methoden aus der bloßen Gleichheit der Flächen zweier Vertical-Winkel führen läßt, ohne daß man an die Fläche des Dreiecks AHC im mindesten denken darf.

§. 52.

Wenn man eine Winkelfläche, die der 360ste Theil der ganzen unendlichen Ebene ist, einen Flächen-Grad; eine solche, die der 60ste Theil eines Flächen-Grads ist, eine Flächen-Minute; die den 60sten Theil einer Flächen-Minute beträgt, eine Flächen-Secunde u. s. w. nennt; so hat ein jeder Winkel BAN (Fig. 6.) eben so viel Grade, als seine Fläche ABN Flächen-Grade enthält.

Denn man setze die Zahl der Grade des Winkels $= m$, und die Zahl der Grade seiner Fläche $= n$; so ist $m : 360 = n : 360$ (§. 36.), also $m = n$.

Also ist es einerley, ob man die Grade des Winkels, oder die Grade seiner Fläche nimmt, folglich kann man die Winkel zum Maaß ihrer Flächen, und die Winkelflächen zum Maaße der Winkel annehmen.

§. 53.

Jede Winkelfläche hat gegen eine andere, und so auch gegen die ganze unendliche Ebene, ein endliches Verhältniß.

Denn sie verhält sich zu jeder andern, wie ihr Winkel zum Winkel der andern (§. 36.), und zur ganzen unendlichen Ebene, wie ihr Winkel zu einem Winkel von $360°$ (§. 35.). Da nun das Verhältniß eines jeden Winkels zu einem andern, und auch zu dem von $360°$ allemal endlich

lich ist; so ist auch das Verhältniß einer Winkelfläche zur andern, imgleichen zur ganzen unendlichen Ebene allemal endlich.

§. 54.

Also kann keine Winkelfläche gegen die andere, noch auch gegen die ganze unendliche Ebene unendlichklein seyn (1. Abth. §. 51.), dagegen können zwey Winkelflächen in jedem endlichen rationalen oder irrationalen Verhältnisse stehen, weil ihre Winkel darin stehen können (§. 36.).

§. 55.

Gleiche Winkel haben gleiche Flächen, auch wenn sie in verschiedenen Ebenen liegen.

Denn da gleiche Winkel allemal einander decken; so fallen, wenn man sie auf einander legt, Scheitel auf Scheitel und Schenkel auf Schenkel. Nun aber sind alle unendliche gerade Linien, die aus einem Punkte nur nach einer Seite ohne Ende fortgehen, einander gleich, auch wenn sie in verschiedenen Ebenen liegen (§. 20.), folglich decken sich auch die unendlichen Schenkel derselben, mithin decken sich auch die unendlichen Flächen, die zwischen ihnen als ihren Grenzen enthalten sind. Also sind dieselben einander gleich.

§. 56.

Da nun jede ganze unendliche Ebene die Fläche eines Winkels von 360° ist (§. 30.); so sind auch alle ganze unendliche Ebenen gleichgroß.

§. 57.

Also verhalten sich zwey Winkel allemal wie ihre Flächen, auch wenn sie in verschiedenen Ebenen liegen.

Denn der eine Winkel verhält sich zu 360°, wie seine Fläche zur ganzen unendlichen Ebene, und der andere verhält sich gleichfalls zu 360°, wie seine Fläche zur ganzen unendlichen Ebene (§. 35.). Da nun beide Ebenen gleich sind (§. 56.); so verhält sich der eine Winkel zum andern, wie seine Fläche zur Fläche des andern.

§. 58.

Also gelten die Sätze §. 37. 38, wie auch §. 52-54, auch von Winkeln, die in verschiedenen Ebenen liegen.

§. 59.

Derjenige unendlichgroße Theil der Ebene ACgQ, oder BEgQ (Fig. 3.), der zwischen zwo geraden Parallellinien BQ, Eg entweder nur nach einer, oder nach beiden Seiten zugleich ohne Ende fortgeht, heißt eine **Parallelfläche**, oder auch, wenn man will, ein **Parallelstreifen**. Die Weite zweyer Parallellinien EC, HG (Fig. 15.) von einander, d. i. jedes Loth AF zwischen ihnen, heißt die **Breite** der Parallelfläche AFGC, oder EHGC.

§. 60.

Wenn zwo Parallelflächen ACgQ, DKNM (Fig. 3.) gleiche Grundlinien AC, DK haben,

und der Winkel QAC = MDK ist, so sind sie gleich und ähnlich.

Denn, da QAC = MDK ist, so ist auch ACg = DKN. Legt man also D auf A, DK auf AC; so fällt K auf C, DM auf AQ, und KN auf Cg. Nun sind die unendlichen Linien DM, AQ, imgleichen KN, Cg einander gleich (§. 20.), folglich decken sich DM und AQ, imgleichen KN und Cg, mithin decken sich auch die unendlichen Flächen DKNM und ACgQ, die zwischen ihnen als ihren Grenzen enthalten sind. Also sind sie einander gleich und ähnlich.

§. 61.

Jede gerade Linie AC, welche zwo Parallellinien BQ, Eg (Fig. 3.) schneidet, halbirt die ganze nach beiden Seiten ohne Ende fortgehende Parallelfläche BEgQ.

Denn da die Parallelflächen ACgQ und CABE einerley Grundlinie AC haben, und der Winkel QAC = ECA ist; so ist ACgQ = CABE (§. 60.). Also ACgQ = $\frac{1}{2}$ BEgQ.

§. 62.

Man ziehe JL (Fig. 3.) mit AC parallel; so ist JLgQ = $\frac{1}{2}$ BEgQ, und ACgQ = $\frac{1}{2}$ BEgQ (§. 61.), folglich ACgQ = JLgQ. Also wird eine Parallelfläche durch die endliche Fläche eines Parallelogramms ACLJ, so groß diese auch seyn mag, weder vergrößert, noch vermindert, d. i. das Parallelogramm AL verschwindet gegen die

Pa-

Parallelfläche ACgQ, oder JLgQ, und ist im Verhältnisse mit ihr völlig Nichts.

§. 63.

Also verschwindet gegen eine Parallelfläche ACgQ überhaupt eine jede ebene Figur, so groß sie auch seyn mag. Denn man setze ihren endlichen Inhalt = a, so ist sie einem Parallelogramm ACLJ gleich, welches AC zur Grundlinie, und die Linie $\frac{a}{AC}$ zur Höhe hat, folglich verschwindet sie gegen die Parallelfläche (§. 62.).

§. 64.

Wenn zwo Parallelflächen AVGC (Fig. 15.) und DKNM (Fig. 3.) gleiche Breiten AF, OP haben; so sind sie einander gleich.

Denn da AF = OP, und CAF = MOP (§. 59.); so ist AFGC = OPNM (§. 60.). Nun ist AFGC = AVGC, und OPNM = DKNM (§. 63.). Also AVGC = DKNM.

§. 65.

Zwo Parallelflächen AFGC und AZPC (Fig. 15.) verhalten sich wie ihre Breiten AF, AZ.

Denn man trage AF auf AD so vielmal auf, als man will, und setze AF = FN = NO u. s. w.; so sind die Parallelflächen AFGC, FNJG, NOLJ u. s. w. alle gleichgroß (§. 64.), folglich ANJC = 2AFGC, AOLC = 3AFGC u. s. w.

 Nun

Nun aber ist auch AN = 2AF, AO = 3AF u. s. w. Also ist allemal AF : AZ = AFGC : AZPC (1. Abth. §. 86.).

§. 66.

Also verhalten sich zwo nur nach einer Seite ohne Ende fortgehende Parallelflächen DKNM (Fig. 3.), und ARPC (Fig. 15.) allemal, wie ihre Breiten OP, AZ, wo sie auch liegen mögen.

Denn man mache AF = OP; so ist AFGC = DKNM, und AZPC = ARPC (§. 64.). Da nun AFGC : AZPC = AF : AZ (§. 65.); so ist DKNM : ARPC = OP : AZ.

§. 67.

Da nun DKNM = $\frac{1}{2}$VRNM (Fig. 3.), und ARPC = $\frac{1}{2}$EQPC (Fig. 15.); so ist auch VRNM : EQPC = OP : AZ. Also verhalten sich auch zwo ganze nach beiden Seiten ohne Ende fortgehende Parallelflächen allemal, wie ihre Breiten.

§. 68.

Das Verhältniß zweyer Parallelflächen gegen einander ist allemal endlich, weil das Verhältniß ihrer Breiten endlich ist (§. 67.), also kann keine Parallelfläche gegen eine andere Parallelfläche unendlichklein seyn (1. Abth. §. 51.). Dagegen können zwo Parallelflächen in jedem endlichen rationalen oder irrationalen Verhältnisse a : b stehen, weil dieses bei ihren Breiten stattfindet (§. 67.).

§. 69.

Durch eine Linie AR oder AZ, welche die Parallellinien EC, QP (Fig. 15.) schneidet, kann die ganze Parallelfläche EQPC in nicht mehr als zwey Theile getheilt werden, und diese sind allemal gleichgroß (§. 61.). Dagegen läßt sich durch eine Linie HG, die mit EC, QP parallel geht, sowol die ganze Parallelfläche EQPC, als auch ihre Hälfte AZPC in jedem endlichen Verhältnisse a:b theilen. Denn man darf nur AZ so theilen, daß AF:AZ = a:b ist, und HG mit EC parallel ziehen; so ist sowol EHGC:EQPC, als auch AFGC:AZPC = a:b.

§. 70.

Die ganze unendliche Ebene ist ein unendlicher Kreis, dessen Halbmesser $= \infty \gamma$, und dessen Durchmesser $= 2\infty\gamma$ ist, und jede Winkelfläche ist ein Ausschnitt desselben.

Denn die ganze unendliche Ebene wird beschrieben, wenn die unendliche gerade Linie AB (Fig. 6.) sich in ihr um den festen Punkt A bewegt, bis sie wieder in ihre vorige Lage kommt, und die Winkelfläche ABN wird beschrieben, wenn AB sich bloß so lange um A bewegt, bis sie in die Lage AN kommt. Da man nun jede Fläche, die durch eine endliche Linie auf die erstere Art beschrieben wird, einen Kreis oder eine Kreisfläche, und die auf die zweite Art beschrieben wird, einen Kreisausschnitt nennt; so erfordert

es

es die Natur der Sache, auch die ganze unendliche Ebene für einen Kreis, und die Winkelfläche für einen Kreisausschnitt vom Halbmesser ∞ zu halten. Denn, da die Natur eines Dinges sich nicht nach der Definition, die man von ihm willkührlich giebt, richtet, sondern vielmehr die Definition, wenn sie adäquat und vollständig seyn soll, sich nach der Natur des Dinges richten muß; so darf man daher nur in der Definition des Kreises, statt des eingeschränkten Worts Figur das allgemeine Wort Fläche setzen, und sie so einrichten: ein Kreis heißt eine ebene Fläche, welche beschrieben wird, wenn sich eine gerade Linie AB in der Ebene um einen festen Punct bewegt, bis sie in ihre erste Lage AB zurückkommt. Ist nun AB endlich, so heißt die beschriebene Fläche ein endlicher Kreis; ist dagegen AB unendlichgroß, so heißt die beschriebene Fläche ein unendlicher Kreis. Der einzige Unterschied zwischen einem endlichen und unendlichen Kreise besteht also darin, daß die Fläche von jenem, weil sie von einem endlichen Halbmesser beschrieben wird, von der Linie, die sein Endpunkt beschreibt, d. i. von seiner Peripherie völlig begrenzt wird, die Fläche von diesem aber, weil sie von einem unendlichen Halbmesser, der keinen Endpunkt hat, beschrieben wird, auch nicht von einer Linie, die dieser beschreibt, d. i. von keiner Peripherie begrenzt werden kann, folglich, der Natur des Unendlichen gemäß, unbegrenzt ist. Der Begriff

eines unendlichen Kreises ist daher eben so real, als der Begriff eines endlichen; nur hat jener eben darum, weil er unendlich ist, keine Peripherie, die ihn begrenzt, sondern diese ist ein Unding und bloß was imaginaires, weil ein Punkt, der unendlich weit vom Mittelpunkte A absteht, ein Unding ist. Da man indessen in der Analysis die imaginairen Größen als hevristische Fictionen zum Behuf des Calculs eben so sicher, als die wirklichen Größen, gebrauchen kann; so kann man sich zu diesem Zwecke auch beim unendlichen Kreise eine Peripherie imaginiren. Und da das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie immer dasselbe bleibt, so groß man auch den Durchmesser annehmen mag; so muß dasselbe auch unverändert bleiben, wenn der Durchmesser unendlichgroß wird. Das heißt in der eigentlichen Sprache so viel: imaginirt man sich beim unendlichen Kreise eine Peripherie, so verhält sich der Durchmesser zu ihr eben so, als in endlichen Kreisen, wie 1 : 3, 14159 .... *).

Die

*) Hieraus läßt sich der vom Hr. M. Eichler l. c. pag. 20. angeführte Versuch beurtheilen, welchen der berühmte Abt de la Caille in seinen Lection. Elem. Math. §. 432. gemacht hat, die Lehre von den Parallellinien zu beweisen, und der unter den 28 Versuchen, welche Hr. Prof. Klügel beurtheilt hat, noch nicht mit befindlich ist. De la Caille betrachtet die Parallellinien AB, CD (Fig. 16.) als aequidistantes, und schließt so: da der Bogen TB immerfort das Maaß des Winkels TEB ist, so weit auch

Die angezeigte Art, die unendliche Ebene durch Umdrehung einer unendlichen Linie AB um

auch T und B von E entfernt sind; so muß er es auch seyn, wenn die Punkte T, B von E unendlich weit entfernt sind. In diesem Fall aber verschwindet die endliche EG gegen die unendliche ET, folglich ist es eben so viel, als wenn G in E läge; und da alle Punkte in GD von AB gleich weit abstehen, so ist es eben so viel, als wenn die ganze unendliche Linie GD in EB läge, folglich sind die Winkel TEB, TGD als gleich anzusehen. Denn das Maaß des Winkels TEB ist der unendliche Bogen TB, und das Maaß von TGD ist der unendliche Bogen TBD, der nur um den Bogen BD größer ist, als TB. Allein BD ist nur endlich, und da das Endliche zum Unendlichen sich eben so verhält, wie das Unendlichkleine zum Endlichen, so können die endlichen Winkel TEB, TGD nur unendlich wenig differiren, also sind sie für gleich zu halten. Hier ist nun das Mangelhafte dieses Beweises leicht zu erkennen. Erstlich setzt er den an sich richtigen Satz, daß das Endliche gegen das Unendliche verschwinde, bloß aus der Analysis voraus, ohne ihn geometrisch zu beweisen; also gehört der Beweis nicht in die Elementargeometrie, sondern in die Analysis. Zweitens nimmt er zum Maaße der beiden Winkel unendliche Kreisbogen an, die Undinge und nur als imaginaire Größen in der Analysis brauchbar sind. Drittens ist diese ganze Fiction zum Beweise, daß die Winkel TEB, TGD gleich sind, ganz unnöthig, weil dieser Satz sich aus den ordentlichen geometrischen Gründen mit der größesten Schärfe und zwar ganz leicht demonstriren läßt. Dagegen bleibt der umgekehrte Satz, auf

um den Punkt A zu beschreiben, ist auch die einzige, die sich denken läßt. Denn, wollte man sich vorstellen, die unendliche Linie AQ (Fig. 3.) rückte auf AJ so fort, daß sie in jeder Lage Cg, DM u. s. w. immerfort mit AQ parallel bliebe; so beschriebe sie, so weit sie auch fortrückte, nur immer eine Parallelfläche, wie AKNQ, die gegen die Winkelfläche AQJ kein Verhältniß hat, und so könnte sie nie die Winkelfläche AQJ, also auch nicht die halbe oder ganze unendliche Ebene beschreiben. Ueberhaupt, so real der Begriff eines

auf den es hier eigentlich ankommt, daß, wenn TEB, TGD gleich sind, EB, GD gleich weit abstehen, hier doch unerwiesen, indem bei dieser Annahme unausgemacht bleibt, ob nicht der Bogen BD hier völlig Null werden kann, und daher EB, GD als Linien anzusehen sind, die in einer unendlichen Weite zusammenliefen, d. i. die sich in der endlichen Weite als Asymptoten beständig nähern. Denn, legte man nun auch G in E, so könnte GD doch dergestalt in EK fallen, daß der Bogen KB endlich, folglich TEB, TGD, der Annahme gemäß, wirklich gleich wären. Also ist auf diesem Wege auch nicht einmal an einen algebraischen Beweis für die Theorie der Parallellinien zu denken. Viertens ist indessen merkwürdig, daß de la Caille den Satz, daß GT = ET sey, ohne allen Beweis als bekannt annimmt. Also muß der Satz, daß das Unendliche durch das Endliche nicht vergrößert wird, den Mathematikern doch nicht so ganz fremde oder heterodox seyn. Wenigstens hat, außer Kästner und Segner, doch auch schon de la Caille ihn als ungezweifelt gewiß angesehen.

eines unendlichen Kreises ist, so ist dagegen der Begriff eines unendlichen Dreyecks, und um so mehr eines unendlichen Vierecks oder Vielecks ein völliges Unding. Wollte man sich z. B. die Winkelfläche ACD (Fig. 15.) als ein unendliches Dreyeck vorstellen; so wäre sie ein Dreyeck, das nur eine Ecke A hat, und die ganze unendliche Ebene wäre ein Quadrat, das keine Seite und Ecke hat. Wollte man sich aber, wie sich Hr. Karsten a. a. O. §. 70. S. 193. die Sache denkt, die Winkelfläche AQJ (Fig. 3.) als ein Parallelogramm vorstellen, so wäre sie ein Viereck, das nur eine Ecke hat, und die Fläche des rechten Winkels ACD (Fig. 15.) wäre ein Quadrat von einer Ecke, die halbe unendliche Ebene über BD ein Rechteck von einer Seite und keiner Ecke, und die ganze unendliche Ebene wieder ein Quadrat, das keine Seiten und Ecken hat. Nun läßt sich um jedes Quadrat ein Kreis beschreiben, folglich müßte sich auch hier ein unendlicher Kreis denken lassen, und da die ganze unendliche Ebene nur eine ist, so müßte das unendliche Quadrat mit dem unendlichen Kreise zusammenfallen. Also käme man selbst hier doch wieder darauf zurück, daß die unendliche Ebene ein unendlicher Kreis sey.

§. 71.

Setzt man also das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie $= 1 : \pi$; so ist die ganze unendliche Ebene $= \pi \infty^2 \gamma^2 = 3,14159 \ldots \infty^2 \gamma^2$.

§. 72.

Also ist die Fläche eines jeden rechten Winkels $= \frac{1}{4}\pi\infty^2\gamma^2 = 0,78539 \ldots\ldots \infty^2\gamma^2$.

§. 73.

Wenn sich daher ein Winkel BAN (Fig. 6.) zu 360° verhält, wie n : m, d. i. wenn BAN $= \frac{n}{m}360°$ ist; so ist seine Fläche ABN $= \frac{n}{m} \cdot \pi\infty^2\gamma^2$ (§. 35.), z. B. die Fläche des Winkels von 1 Grad ist $= \frac{1}{360} \cdot \pi\infty^2\gamma^2$, die Fläche des Winkels von 20° $= \frac{20}{360}\pi\infty^2\gamma^2 = \frac{1}{18}\pi\infty^2\gamma^2$ u. s. w.

§. 74.

Da die ganze unendliche Ebene ein unendlicher Kreis ist (§. 70.); so ist jede Winkelfläche ein Ausschnitt eines unendlichen Kreises. Da nun die Ausschnitte eines Kreises sich wie die Winkel, die zu ihnen gehören, verhalten; so folgt hieraus unmittelbar, was oben bewiesen worden, daß die Winkelflächen allemal den Winkeln proportional seyn müssen.

§. 75.

Aus eben diesem Grunde ist jede Parallelfläche ELDB, deren Breite EL ist (Fig. 16.), ein Stück eines unendlichen Kreises vom Halbmesser EB $= \infty\gamma$, das aus dem Rechtecke EJDL

und dem halben Abschnitte JBD besteht. Nun aber ist $JB = \frac{JD^2}{JA} = \frac{EL^2}{\infty\gamma + EJ} = 0$, folglich $EJ = LD = EB = \infty\gamma$, und $JBD = 0$. Also ist die Parallelfläche ELDB genau als ein Rechteck ELDJ anzusehen, das ihre Breite EL zur Grundlinie, und die unendliche Linie $EJ = \infty\gamma$ zur Höhe hat; folglich ist ihr Inhalt $= EL \cdot \infty\gamma$.

§. 76.

Da nun die Parallelfläche EGDB eben so groß ist, als die Parallelfläche ELDB (§. 63.); so ist überhaupt eine jede Parallelfläche EGDB, deren Breite $= EL$ ist, $= EL \cdot \infty\gamma$. Also ist die ganze Parallelfläche ACDB, die zwischen den nach beiden Seiten ohne Ende fortgehenden Parallellinien AB, CD liegt, $= 2EL \cdot \infty\gamma$.

§. 77.

Also ist jede Parallelfläche ein Unendlichgroßes der ersten Ordnung (1. Abth. §. 65.), jede Winkelfläche dagegen (§. 73.), imgleichen jede ganze unendliche Ebene (§. 71.) ist ein Unendlichgroßes der zweiten Ordnung (1. Abth. §. 65.). Und hieraus folgt, daß jede endliche ebene Fläche gegen eine Parallelfläche, und jede Parallelfläche gegen eine Winkelfläche ein Unendlichkleines der ersten Ordnung, mithin jede endliche ebene Fläche gegen eine Winkelfläche schon ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung ist (1. Abth. §. 66.).

§. 78.

Wenn man $\gamma = 1$ setzt; so bedeutet ∞ eine unendliche gerade Linie, die einen Anfangspunkt hat (§. 24.). Also ist jede Parallelfläche EGDB (Fig. 16.), deren Breite = EL ist, = EL . ∞ (§. 76.). Nun nehme man diejenige Parallelfläche EGDB, deren Breite = 1 Fuß ist, zum Maaße der übrigen an; so ist dieselbe = 1 . ∞. Auf diese Art läßt sich jede Gleichung $x = a\infty$ geometrisch construiren. Man mache nemlich (Fig. 15.) AZ = a Fuß, und richte auf ihr die Lothe AC, ZP auf; so ist x der Parallelfläche AZPC gleich. Oder man mache AO = $\frac{1}{2}$ a Fuß, und ziehe durch A und O die Lothe CE, LM; so ist x der ganzen Parallelfläche EMLC gleich.

§. 79.

Setzt man $\gamma = 1$; so ist die ganze unendliche Ebene = $\pi\infty^2$, und die Fläche eines Winkels von $\frac{n}{m} 360^0 = \frac{n}{m}\pi\infty^2$. Also ist für sich klar, daß die Gleichung $x = \pi\infty^2$ sich geometrisch construiren läßt, indem hier x jede ganze unendliche Ebene bedeutet. Allein, da die Zahl $\pi = 3,1415\ldots$ ist, folglich ihren bestimmten Werth hat; so frägt es sich: wie kann allgemein die Gleichung $x = a\infty^2$ construirt werden, welche Zahl auch a bedeuten mag?

§. 80.

Die Gleichung $x = \infty^2$ geometrisch zu construiren.

Man setze den Winkel von $\frac{n}{m} 360^\circ = \frac{1}{\pi} 360^\circ$; so ist $\frac{n}{m} = \frac{1}{\pi}$, folglich die Fläche des Winkels $= \infty^2$ (§. 79.), mithin ist x die Fläche eines Winkels von $\frac{1}{\pi} 360^\circ$, d. i. von $\frac{360^\circ}{3,14159...}$. Nun aber ist dieses derjenige Winkel, dessen Kreisbogen dem Durchmesser gleich ist, d. i. der beynahe $114^\circ 38' 58''$ beträgt. Denn, wenn sich der Winkel zu 360° verhält, wie $1 : \pi$, so verhält sich auch der Kreisbogen, als sein Maaß, zur ganzen Peripherie, wie $1 : \pi$, d. i. wie der Durchmesser zur Peripherie; also ist sein Maaß derjenige Bogen, der dem Durchmesser des Kreises gleich ist. Man mache also (Fig. 16.) den Winkel BEN $= 114^\circ 38' 58''$; so ist seine Fläche EBN $=$ x.

§. 81.

Wenn daher $x = \frac{1}{2} \infty^2$ ist; so ist x der Fläche desjenigen Winkels gleich, der sich zu 360° verhält, wie $\frac{1}{2} : \pi$, d. i. wie der Halbmesser zur Peripherie, oder dessen Bogen, als sein Maaß, dem Halbmesser gleich ist, also der Fläche des Winkels von beynahe $57^\circ 19' 29''$.

§. 82.

Die allgemeine Gleichung $x = a\infty^2$ geometrisch zu construiren.

Man ziehe einen Winkel TEB (Fig. 16.), der $= \frac{a}{\pi} \cdot 360^\circ = \frac{a \cdot 360^\circ}{3,1415 \ldots}$ ist; so ist seine Fläche $= x$.

Denn da hier $\frac{n}{m} = \frac{a}{\pi}$ ist; so ist $\frac{n}{m} \cdot \pi\infty^2 = a\infty^2$. Also ist die Fläche des Winkels, der $= \frac{a}{\pi} \cdot 360^\circ$ ist, $= a\infty^2$ (§. 79.).

Hier ist nun von selbst klar, daß, wenn $a < \pi$, d. i. $a < 3,14159 \ldots$ ist, der Winkel von $\frac{a}{\pi} \cdot 360^\circ < 360^\circ$ wird, folglich ist hier x eine Fläche, die kleiner, als die ganze unendliche Ebene $\pi\infty^2$ ist. Ist dagegen $a > 3,141 \ldots$; so wird der Winkel größer als 360°, folglich sind 360° in ihm 1 oder mehrere male enthalten, also enthält in diesem Falle x die ganze unendliche Ebene schon 1 oder mehrere male.

§. 83.

Wenn der Winkel TEB (Fig. 16.) $= \frac{a}{\pi} \cdot 360^\circ$ ist; so verhält er sich zu 360°,

wie a : π, folglich verhält sich auch der Bogen TB, als sein Maaß zur Peripherie, wie a : π. Nun setze man den Halbmesser ET $=$ r; so ist die Peripherie $= 2\pi r$, folglich $\pi : a = 2\pi r$: TB, mithin TB $=$ 2ar. Also ist der Sector ETB, als das Maaß des Winkels TEB, allemal $= 2ar^2$, man mag den Halbmesser r so groß annehmen, als man will; folglich muß dieses auch gelten, wenn $r = \infty$ wird, d. i. in diesem Falle muß der Sector, als das Maaß von TEB $= a\infty^2$ werden. Da nun dieses richtig folgt, wenn man die Fläche des Winkels TEB als den Sector eines Kreises vom Halbmesser ∞ betrachtet (§. 82.); so ist klar, daß die Winkelflächen, als Sectors eines Kreises vom Halbmesser ∞ betrachtet, die Winkel eben so richtig messen, als die Sectors endlicher Kreise, und eben dieses ist zugleich eine Bestätigung, daß sie nicht anders als auf diese Art zu betrachten sind. So ist z. B. der Sector EBN, als das Maaß desjenigen Winkels BEN, dessen Verhältniß wie 1 : π, d. i. dem Verhältnisse des Durchmessers zur Peripherie gleich ist, allemal dem Quadrate des Halbmessers EN gleich. Setzt man also EN $= \infty$; so muß der Sector EBN $= \infty^2$ werden, und so groß ist die Fläche des Winkels BEN wirklich, wenn man sie als Sector eines Kreises vom Halbmesser ∞ betrachtet (§. 80.); folglich ist sie so betrachtet das richtige Maaß des Winkels BEN.

§. 84.

§. 84.

Da sich keine ebene Fläche denken läßt, die größer wäre, als die ganze unendliche Ebene, diese aber $= 3,14159 \ldots\ldots \infty^2$ ist; so ist unter allen unendlichgroßen ebenen Flächen die allergrößeste $= 3,14159 \ldots\ldots \infty^2$. Wenn daher $a > 3,14159 \ldots$ ist; so hat der Ausdruck $a\infty^2$, wofern er eine einzige zusammenhangende ebene Fläche bedeuten soll, gar keinen Sinn mehr, sondern in diesem Falle muß man, wenn er einen Sinn haben soll, schon verschiedene unendliche Ebenen zusammenzählen (§. 82.).

III.

Von den unendlichgroßen körperlichen Räumen.

§. 85.

Der körperliche Raum ADM (Fig. 17.), der zwischen den halben unendlichen Ebenen AD, AM, als den Schenkeln des Flächenwinkels DAM, ohne Ende fort enthalten ist, heißt der Raum des Flächenwinkels *DAM*, überhaupt aber ein Flächenwinkelraum, oder auch kurz: ein Winkelraum.

§. 86.

Also ist derjenige Theil des ganzen unendlichen körperlichen Raums, welcher über einer ganzen unendlichen Ebene LM liegt, der Raum eines

nes Flächenwinkels ADM + ADV, d. i. eines Flächenwinkels von 180°, und der ganze unendliche Raum ist der Raum eines Flächenwinkels ADM + ADV + AJV + AJM, d. i. eines Flächenwinkels von 360°.

§. 87.

Wenn zwey Flächenwinkel QFN, RFP (Fig. 18.), welche einerley Scheitellinie FG haben, einander gleich sind; so sind auch ihre Räume FQN, FRP gleich.

Denn man lege die Fläche FP auf die Fläche FN; so fällt, weil gleiche Flächenwinkel einander decken, die Fläche FR auf FQ. Nun deckt die unendliche Ebene FP die Ebene FN, und FR deckt FQ (§. 56.), folglich deckt auch der Raum FRP zwischen jenen den Raum FQN zwischen diesen. Also sind die Räume FRP, FQN einander gleich.

§. 88.

Wenn zwey Flächenwinkel QFN, MFN einerley Scheitellinie FG haben, so verhalten sie sich allemal wie ihre Räume FQN, FMN.

Denn man setze die Flächenwinkel QFN, PFQ, RFP u. s. w. alle gleich groß; so sind auch ihre Räume gleich (§. 87.), folglich ist der Raum FPN = 2FQN, FRN = 3FQN u. s. w. Nun aber ist auch der Flächenwinkel PFN = 2QFN, RFN = 3QFN u. s. w., folglich hat ein n mal größerer Flächenwinkel auch einen

n mal

n mal größern Raum. Also verhalten sich jede zwey Flächenwinkel QFN, MFN, wie ihre Räume FQN, FMN (1. Abth. §. 86.).

§. 89.

Also verhält sich auch jeder Flächenwinkel QFN zu einem Flächenwinkel von 360°, wie sein Raum FQN zum ganzen unendlichen Raum (§. 86. 88.).

§. 90.

Zwey Flächenwinkel DAM, QFN (Fig. 17. 18.) verhalten sich allemal wie ihre Räume ADM, FQN, wo sie auch immer liegen mögen.

Denn

$$\left.\begin{array}{l} DAM : 360^\circ = ADM : \text{ganzen Raum}, \\ QFN : 360^\circ = FQN : \text{ganzen Raum}, \end{array}\right\} (\S. 89.).$$

Also

$$DAM : QFN = ADM : FQN.$$

§. 91.

Also haben gleiche Flächenwinkel gleiche Räume, und gleiche Winkelräume gehören zu gleichen Flächenwinkeln. Ein größerer Flächenwinkel dagegen hat auch einen größern Raum, und ein größerer Winkelraum gehört auch zu einem größern Flächenwinkel (§. 90.).

§. 92.

Zwey Winkelräume ADM, FQN zusammen sind allemal größer, als einer von ihnen.

Denn DAM : QFN = ADM : FQN (§. 90.), folglich DAM + QFN : QFN

 =

= ADM + FQN : FQN. Da nun DAM + QFN > QFN, weil die Flächenwinkel endliche Größen sind, so ist auch ADM + FQN > FQN.

§. 93.

Wenn man denjenigen Winkelraum, der den 360sten Theil des ganzen unendlichen Raums beträgt, einen Raum-Grad, den 60sten Theil von diesem eine Raum-Minute, den 60sten Theil von dieser eine Raum-Secunde u. s. w. nennt; so enthält der Raum eines jeden Flächenwinkels eben so viel Grade, Minuten und Secunden, als der Flächenwinkel selbst, und es ist also jeder Flächenwinkel zugleich das Maaß seines Raums, und umgekehrt.

§. 94.

Da jeder Flächenwinkel zu einem andern und auch zu dem von 360° ein endliches Verhältniß hat; so ist auch das Verhältniß eines jeden Winkelraums zu einem andern, imgleichen zum ganzen unendlichen Raum endlich (§. 89. 90.). Also kann kein Winkelraum gegen einen andern, noch gegen den ganzen unendlichen Raum unendlich klein seyn. Da aber zwey Winkelflächen in jedem endlichen rationalen oder irrationalen Verhältnisse stehen können; so gilt dieses auch von zwey Winkelräumen, imgleichen vom ganzen unendlichen Raum in Ansehung eines Winkelraums.

§. 95.

§. 95.

Wenn zwo zusammenstoßende Ebenen von einer dritten unter parallelen Linien geschnitten werden, so ist der äußere Flächenwinkel größer, als der entgegengesetzte innere; und umgekehrt: wenn zwo Ebenen von einer dritten unter parallelen Linien so geschniten werden, daß der äußere Flächenwinkel größer ist, als der entgegengesetzte innere; so stoßen sie nach der Seite, wo die Flächenwinkel liegen, zusammen.

Wenn daher zwo Ebenen von einer dritten unter parallelen Linien so geschnitten werden, daß der äußere Flächenwinkel dem entgegengesetzten innern gleich ist, so sind sie parallel; und umgekehrt: zwo parallele Ebenen werden von einer dritten unter parallelen Linien allemal so geschnitten, daß der äußere Flächenwinkel dem entgegengesetzten innern gleich ist. Diese vier Sätze sind aus der Geometrie bekannt. Wie sie sich aber unmittelbar aus den Räumen der Flächenwinkel demonstriren lassen, habe ich in meiner Theorie der Parallelen S. 136. f. gezeigt.

§. 96.

Ein solcher körperlicher Raum EJDB, oder ACDB (Fig. 19.), der zwischen zwo halben oder ganzen unendlichen parallelen Ebenen EB, JD, oder AB, CD ohne Ende fort enthalten ist, heißt ein Parallelraum, und die gerade Linie EZ, die auf den beiden Ebenen, zwischen welchen derselbe fortgeht, senkrecht ist, die Breite desselben.

§. 97.

Wenn die unendlichen parallelen Ebenen AB, CD von einer dritten LM geschnitten werden; so sind die Durchschnittslinien EH, JK parallel, folglich ist die zwischen EH, JK nach beiden Seiten E, J und H, K ohne Ende fortgehende Ebene, welche den ganzen Parallelraum ACDB in die beiden Theile HJDB, HJCA theilt, eine ganze Parallelfläche, deren Breite das Loth EZ, folglich der Breite des Parallelraums ACDB gleich ist.

§. 98.

Wenn zwey Parallelräume HJDB, PVRG gleiche Breiten EZ, OX haben, so sind sie einander gleich.

Denn man lege O auf E, OX auf EZ, und die Ebene OXTP auf EZKH; so deckt die ganze Parallelfläche OVTP die ganze Parallelfläche EJKH (§. 60.), ferner fällt die halbe unendliche Ebene OG in EB, und VR in JD, und sie decken sich Paarweise (§. 56.), folglich deckt auch der Parallelraum PVRG den Parallelraum HJDB. Also sind beide einander gleich.

§. 99.

Also wird der ganze Parallelraum ACDB durch die Parallelfläche EJKH halbirt.

Denn da HJDB = HJCA (§. 98.); so ist HJDB = $\frac{1}{2}$ ACDB.

§. 100.

Also sind auch zwey ganze Parallelräume ACDB, FQRG von gleichen Breiten EZ, OX gleich.

Denn da HJDB, PVRG die Hälften von ACDB, FQRG (§. 99.) und gleich groß sind (§. 98.); so sind auch ACDB, FQRG gleich groß.

§. 101.

Zwey ganze Parallelräume ACDB, AQRB verhalten sich, wie ihre Breiten EU, EY.

Denn man setze EU = UW = WY u. s. w.; so sind die Parallelräume ACDB, CFGD, FQRG u. s. w. alle gleich groß (§. 100.), folglich AFGB = 2ACDB, AQRB = 3ACDB u. s. w. Nun aber ist auch EW = 2EU, EY = 3EU u. s. w., folglich giebt eine n mal größere Breite einen n mal größern Parallelraum. Also verhalten sich allemal zwey Parallelräume ACDB, AQRB, wie ihre Breiten EU, EY, das Verhältniß der Breiten sey, welches man wolle (1. Abth. §. 86.).

§. 102.

Also können zwey Parallelräume in jedem endlichen Verhältnisse stehen, und da ihr Verhältniß gegen einander allemal endlich ist; so kann kein Parallelraum gegen den andern unendlich klein seyn.

§. 103.

§. 103.

Dagegen verschwindet jeder Parallelraum HJDB gegen den Raum EBN eines Flächenwinkels BEN völlig.

Denn, wenn die Ebenen AB, CD parallel sind, so ist der Flächenwinkel DJN = BEN (§. 95.), folglich ist auch sein Winkelraum JDN = EBN. Also wird die Größe der Winkelräume JDN, EBN durch den Parallelraum HJDB gar nicht verändert.

§. 104.

Ein solcher körperlicher Raum, der zwischen den Seitenflächen eines Prisma, oder innerhalb der Seitenfläche eines Cylinders, entweder nur nach einer Seite, wie ACBJHG, oder nach beiden Seiten zugleich, wie KLMJHG (Fig. 20. 21.) ohne Ende fortgeht, heißt im erstern Fall ein prismatischer, im zweyten ein cylindrischer Raum, und diejenige ebene Durchschnitts-Figur ACB, die seine Seitenflächen senkrecht schneidet, heißt seine Grundfläche.

§. 105.

Da alle Seitenflächen eines Prisma Parallelogrammen, folglich alle Seitenlinien desselben mit einander parallel sind; so sind alle unendliche Seitenflächen ACHG, CBJH u. s. w., die den prismatischen Raum ringsum begrenzen, lauter Parallelflächen (§. 59.). Wenn man daher den

pris-

prismatischen Raum durch eine ebene Figur ACB so schneidet, daß sie auf allen Seitenflächen desselben senkrecht ist; so sind ihre Seiten AC, CB, AB u. s. w. die Breiten der Parallelflächen ACHG, CBJH, ABJG u. s. w. Also sind alle unendlichen Seitenflächen, die den prismatischen Raum ringsum begrenzen, so groß, als eine Parallelfläche, deren Breite dem Perimeter AC + CB + AB + ... des senkrechten Durchschnitts ACB..... gleich ist (§. 66.). Setzt man daher den Perimeter eines solchen Durchschnitts = p, so ist die unendliche Seitenfläche des prismatischen Raums ACBJHG = $p \infty \gamma$ = $p \infty$, wenn man $\gamma = 1$ setzt (§. 76.), und des ganzen nach beiden Seiten ohne Ende fortgehenden prismatischen Raums KLMJHG = $2p \infty \gamma = 2p \infty$, für $\gamma = 1$. Und eben dieses gilt auch von der Seitenfläche des cylindrischen Raums ACBJHG, und KLMJHG (Fig. 21.), wenn man die Peripherie des Kreises, der sie senkrecht schneidet, gleichfalls = p setzt.

§. 106.

Ein solcher körperlicher Raum CFGH (Fig. 22. 23.), der innerhalb den Seitenflächen CFG, CGH, CFH einer gleichseitigen Pyramide, oder innerhalb der Seitenfläche eines senkrechten Kegels nach der Seite F, G, H ohne Ende fortgeht, heißt im ersten Fall ein **pyramidalischer**, im zweiten ein **conischer** Raum.

§. 107.

Der ganze unendliche Raum ist eine unendliche Kugel, deren Durchmesser $= 2 \infty \gamma$ ist.

Denn er wird beschrieben, wenn die halbe unendliche Ebene sich um die nach beiden Seiten ohne Ende fortgehende gerade Linie AB, d. i. wenn der unendliche Halbkreis ADB (Fig. 24.) sich um seinen Durchmesser $AB = 2 \infty \gamma$ bewegt.

§. 108.

So real also der Begriff eines unendlichen Kreises ist, so real ist auch der Begriff einer unendlichen Kugel. Da aber jener keine Peripherie hat; so kann auch diese keine Oberfläche haben. Wenn man sich indessen eine imaginirt; so kann man sie, wie jede imaginaire Größe, in der Rechnung mit Vortheil gebrauchen: und da die Oberfläche einer Kugel allemal 4mal so groß ist, als ein größester Kreis der Kugel, der Durchmesser mag noch so groß seyn; so muß dieses auch von der imaginairen Oberfläche des unendlichen Kugelraums gelten. Also ist diese $= 4\pi \infty^2 \gamma^2$ (§. 71.).

§. 109.

Also ist der ganze unendliche Raum $= \frac{4}{3}\pi \infty^3 \gamma^3$, und wenn man $\gamma = 1$ setzt, $= \frac{4}{3}\pi \infty^3 = 4{,}188790204786 \ldots\ldots\ldots \infty^3$.

§. 110.

Da nun der ganze unendliche Raum die allergrößeste Größe ist, die wir kennen, und wir uns etwas,

etwas, was noch größer wäre, als derselbe, gar nicht denken, ja nicht einmal imaginiren können; so ist unter allen möglichen unendlichen Größen die allergrößeste oder das absolute Maximum $= \frac{4}{3}\pi\infty^3 = 4,18879 \ldots \infty^3$, folglich ein Unendlichgroßes der dritten Ordnung. Also sind sowol alle Größen, die größer sind, als $\frac{4}{3}\pi\infty^3$, als auch alle Ordnungen des absolut Unendlichgroßen, die größer sind als die dritte, Chimären und Undinge, mithin sind die Ausdrücke $\infty^{3+\frac{1}{2}}$, ∞^4, ∞^5 und überhaupt ∞^{3+n} ohne alle Bedeutung, die bloß als algebraische Fictionen zum Behuf der Rechnung dienen. Und so kennen wir bereits die beiden äußersten Grenzen, die keine mögliche Größe, sie sey endlich oder unendlich, überschreiten kann, nemlich 0 und $4,18879 \ldots \infty^3$.

§. 111.

Da der ganze unendliche Raum eine unendliche Kugel ist; so ist der Raum eines jeden Flächenwinkels ein keilförmiger Kugelausschnitt GHDAG (Fig. 24.), der zwischen den beiden unendlichen Halbkreisen GHD, GAD enthalten ist. Da nun die keilförmigen Ausschnitte einer Kugel sich wie die Flächenwinkel verhalten, welche die Ebenen ihrer Halbkreise mit einander machen; so folgt hieraus unmittelbar, was §. 90. bewiesen worden, daß die Flächenwinkel sich allemal wie ihre Räume verhalten.

§. 112.

Da nun ein Flächenwinkel von 90° sich zu einem von 360° wie 1 : 4 verhält; so verhält sich auch sein Raum zum ganzen unendlichen Raum, wie 1 : 4. Also ist der Raum eines rechten Flächenwinkels der vierte Theil des ganzen unendlichen Raums, folglich $= \frac{1}{3}\pi\infty^3$ $= 1,047197551 19 \ldots\ldots \infty^3$. Mithin ist der halbe unendliche Raum, sowol der über uns, als der unter uns,

$$= \tfrac{2}{3}\pi\infty^3 = 2,0943951 0238 \ldots\ldots \infty^3.$$

§. 113.

Wenn sich die Grade eines Flächenwinkels zu 360°, wie n : m verhalten; so verhält sich auch sein Raum zum ganzen unendlichen Raum, d. i. zu $\frac{4}{3}\pi\infty^3$, wie n : m (§. 89.). Wenn daher ein Flächenwinkel $= \frac{n}{m} 360°$ ist; so ist sein

$$\text{Raum} = \frac{4n\pi\infty^3}{3m} = \frac{n}{m} \cdot 4,18879 \ldots\ldots \infty^3.$$

Z. B. der Raum eines Flächenwinkels von 1 Grad ist $= \frac{1}{360} \cdot 4,18879 \ldots\ldots \infty^3$, eines Flächenwinkels von 30° $= \frac{1}{12} \cdot 4,18879 \ldots\ldots \infty^3$ u. s. w.

§. 114.

Da der ganze Raum eine unendliche Kugel ist; so ist jeder ganze Parallelraum ein Kugelstück, das zwischen zwey Parallelkreisen AFB, MEN (Fig. 24.) der unendlichen Kugel enthalten

ist,

ist, und beschrieben wird, wenn die unendliche Parallelfläche CPMA sich um ihre Breite CP, als um ihre Axe, herumbewegt. Nun aber ist die Parallelfläche CPMA als ein Rechteck aus CP in die unendliche Linie CA anzusehen (§. 75.), folglich wird der ganze Parallelraum beschrieben, indem sich das unendliche Rechteck CPMA um die Seite CP herumbewegt. Also ist derselbe als ein Cylinder anzusehen, der den von CA oder PM beschriebenen unendlichen Kreis AFB oder MEN zur Grundfläche, und des Parallelraums Breite CP zur Höhe hat.

§. 115.

Also ist der ganze Parallelraum ABNM (Fig. 24.), dessen Breite CP ist, $= \pi \cdot CP \cdot \infty^2 \gamma^2$ (§. 71.) $= \pi \cdot CP \cdot \infty^2 = 3,14159 \ldots CP \cdot \infty^2$, wenn man $\gamma = 1$ setzt, folglich der halbe Parallelraum HJDB (Fig. 19.) von eben derselben Breite $= \frac{1}{2}\pi \cdot CP \cdot \infty^2 = 1,57079 \ldots CP \cdot \infty^2$.

§. 116.

Nimmt man daher einen ganzen Parallelraum, dessen Breite = 1 Fuß ist, zum Maaße der übrigen an; so ist derselbe $= \pi \infty^2$, und jeder ganze Parallelraum, dessen Breite = a Fuß ist, ist also $= \pi a \infty^2 = 3,1415 \ldots a \infty^2$.

§. 117.

Jeder ganze prismatische Raum KLMJHG (Fig. 20.) ist ein unendliches Kugelstück, das ringsum von lauter Parallelflächen KLHG, LMJH u.s.w.

begrenzt wird. Da nun diese als unendliche Rechtecke anzusehen sind (§. 75.); so ist der prismatische Raum KLMJHG als ein senkrechtes Prisma aus der Grundfläche ACB und der unendlichen Höhe KG $= 2 \infty \gamma$ anzusehen.

Da nun ferner jeder Cylinder als ein unendlicheckigtes Prisma anzusehen ist; so ist auch der cylindrische Raum KLMJHG (Fig. 21.) als ein senkrechter Cylinder anzusehen, der den Kreis ACB zur Grundfläche und KG $= 2 \infty \gamma$ zur Höhe hat.

§. 118.

Also ist, wenn man die Grundfläche ACB $= a^2$ setzt, der ganze prismatische und cylindrische Raum KLMJHG $= 2a^2 \infty \gamma = 2a^2 \infty$, für $\gamma = 1$.

§. 119.

Also verhalten sich zwey ganze prismatische oder cylindrische Räume, wie ihre Grundflächen. Denn, es sey die Grundfläche des einen $= a^2$, des andern $= b^2$; so ist der erste $= 2a^2 \infty$, der zweite $= 2b^2 \infty$. Also verhält sich der erste zum zweiten, wie $a^2 : b^2$.

§. 120.

Da nun das Verhältniß der Grundflächen $a^2 : b^2$ allemal endlich ist, aber jedes endliche seyn kann; so ist auch das Verhältniß zweyer prismatischen oder cylindrischen Räume gegen einander allemal endlich, und es kann also keiner in Ansehung des andern unendlichgroß seyn, dagegen aber können sie auch in jedem endlichen Verhältnisse stehen.

§. 121.

§. 121.

Da der ganze unendliche Raum eine unendliche Kugel ist (§. 107.); so ist jeder conische Raum CMENDM (Fig. 24.) ein kegelförmiger Kugelausschnitt, der aus dem unendlichen senkrechten Kegel CMENM, dessen Axe CP ist, und dem Kugelabschnitte DMHEN besteht, und der also das Stück der Kugelfläche DMHN, welches der senkrechte Durchschnittskreis MEN absondert, zur Grundfläche, und den Halbmesser der Kugel $CD = \infty\gamma$ zur Höhe hat. Also ist der conische Raum so groß als ein Kegel, der das Stück der Kugelfläche DMHN zur Grundfläche, und $CD = CM = \infty\gamma$ zur Höhe hat.

Eben so ist jeder pyramidalischer Raum ein pyramidenförmiger Ausschnitt der unendlichen Kugel.

§. 122.

Wenn man den Sinus totus $= 1$, und den Cosinus des Winkels DCM, den die unendliche Axe CD des conischen Raums CMENDM (Fig. 24.) mit der unendlichen Seitenlinie CM macht, $= c$ setzt; so ist der conische Raum $= \frac{2}{3}(1 - c)\pi\infty^3\gamma^3 = \frac{2}{3}(1 - c)\pi\infty^3$, wenn man $\gamma = 1$ setzt, $= 2{,}09439\ldots(1 - c)\infty^3$.

Denn das Stück der Kugelfläche DMHN, welches der senkrechte Durchschnittskreis MEN absondert, ist so groß als die Seitenfläche eines Cylinders, welcher den größten Kugelkreis zur

 Grund-

Grundfläche, und PD zur Höhe hat, d. i. so groß, als das Rechteck aus der Peripherie des größten Kugelkreises in die Höhe PD. Nun ist die Peripherie des größten Kugelkreises $= 2\pi \cdot CM$, und da $CP = c \cdot CM$ ist; so ist $PD = CD - CP = CM - CP = (1 - c)\,CM$, folglich ist das Stück der Kugelfläche DMHN $= 2\pi(1 - c)\,CM^2$. Da nun der conische Raum CMENDM, als ein kegelförmiger Kugelausschnitt, so groß ist, als ein Kegel, der das Stück der Kugelfläche DMHN zur Grundfläche, und $CM = \infty\gamma$ zur Höhe hat, so ist derselbe $=$

$\frac{2}{3}\pi(1-c)\,\infty^3\gamma^3 = \frac{2}{3}(1-c)\,\pi\,\infty^3$, für $\gamma = 1$.

§. 123.

Da nun der ganze unendliche Raum $= \frac{4}{3}\pi\infty^3$ ist (§. 109.); so verhält sich der conische Raum zum ganzen unendlichen Raum, wie $1 - c : 2$. Setzt man daher den ganzen unendlichen Raum $= S$; so ist ein conischer Raum CMENDM, in welchem $\cos. DCM = c$ ist, $= \frac{1}{2}(1 - c)\,S$.

Vermittelst dieser Formel läßt sich also aus der gegebenen Größe des Winkels DCM leicht finden, wie sich der conische Raum zum ganzen unendlichen Raum verhält. Es sey z. B. $DCM = 60^o$; so ist $c = \frac{1}{2}$, also der conische Raum $= \frac{1}{4}S$. Es sey $DCM = 90^o$; so ist $c = 0$, also der conische Raum, dessen Seite mit der Axe einen rechten Winkel macht, $= \frac{1}{2}S$.

§. 124.

Dieses letzte Exempel ist besonders merkwürdig. Die Größe des conischen Raums CMENDM nähert sich immer mehr der Hälfte des ganzen unendlichen Raums, die über der unendlichen Ebene AFB liegt, und seine Seitenfläche kommt eben dieser Ebene desto näher, je mehr sich der Winkel DCM der Größe des rechten nähert. Wird aber derselbe wirklich ein rechter; so fällt die ganze Seitenfläche in die Ebene AFB selbst, und der conische Raum verwandelt sich also in die halbe unendliche Kugel, d. i. in den halben unendlichen Raum, gerade so, wie es die Rechnung §. 123. bestimmt. Also ist dieses eine Bestätigung, daß die für den conischen Raum gefundene Formel richtig ist, und daß also derselbe wirklich ein unendlicher kegelförmiger Kugelausschnitt ist.

Wollte man ihn dagegen als einen unendlichen Kegel CMEN ansehen, dessen Grundfläche der Kreis MEN wäre; so ist, wenn man den Sinus des Winkels DCM $=$ s setzt, MP $=$ s.CM, folglich der Kreis MEN $= \pi s^2 \cdot CM^2$. Da nun CP $=$ c·CM ist; so ist der unendliche Kegel CMEN $= \frac{1}{3}\pi s^2 c \cdot CM^3 = \frac{1}{3}\pi s^2 c \infty^3$. Setzt man hier DCM $= 90^\circ$; so ist c $= 0$, folglich CMEN $= 0$. Wollte man also den conischen Raum für einen unendlichen Kegel ansehen, so würde derselbe, für DCM $= 90^\circ$, $= 0$

werden, da er doch hier halb so groß ist, als der ganze unendliche Raum.

§. 125.

Man setze, der conische Raum soll $= \frac{n}{m} S$ seyn; so ist $\frac{1}{2}(1 - c) S = \frac{n}{m} S$ (§. 123.), also $c = \frac{m - 2n}{m}$. Durch diese Formel kann man also finden, wie groß der Winkel DCM für den conischen Raum seyn muß, wenn dieser $\frac{n}{m}$ vom ganzen unendlichen Raum enthalten soll.

Gesetzt z. B. man verlangt den Winkel des conischen Raums, der $= \frac{1}{10} S$ ist; so ist $c = \frac{4}{5}$. Also ist hier DCM derjenige Winkel, dessen Cosinus $= \frac{4}{5}$ ist, d. i. der Winkel von beynahe $36^0 52'$.

§. 126.

Da der conische Raum CMEND $= \frac{2}{3}(1 - c) \pi \infty^3$ und der Raum des Flächenwinkels AGD von $\frac{n}{m} 360^0 = \frac{4 n \pi \infty^3}{3 m}$ ist (§. 113.); so verhält sich der conische Raum zum Raum eines Flächenwinkels von $\frac{n}{m} 360^0$, wie $m(1 - c) : 2n$.

Soll

Soll daher der conische Raum dem Raum des Flächenwinkels gleich seyn; so ist $m(1-c)=2n$. Also ist $\frac{n}{m}=\frac{1-c}{2}$, und $c=\frac{m-2n}{m}$.

Vermittelst der ersten von diesen beiden Formeln kann man also jeden gegebenen conischen Raum in den Raum eines Flächenwinkels verwandeln. Es sey z. B. im conischen Raum der Winkel DCM $=60^o$, so ist $c=\frac{1}{2}$, folglich $\frac{n}{m}=\frac{1}{4}$. Also ist der verlangte Flächenwinkel, dessen Raum dem conischen gleich ist, $=90^o$.

Vermittelst der zweiten Formel kann man umgekehrt den Raum eines jeden gegebenen Flächenwinkels in einen conischen Raum verwandeln. Es sey z. B. der gegebene Flächenwinkel $=72^o$ $=\frac{360^o}{5}$, so ist $\frac{n}{m}=\frac{1}{5}$, folglich $c=\frac{3}{5}=0,6$. Also ist der verlangte Winkel DCM für den conischen Raum $=53^o 8'$.

§. 127.

Da also jeder conische Raum sich in einen Flächenwinkelraum verwandeln läßt; so ist kein conischer Raum weder gegen einen andern conischen, noch gegen einen Winkelraum unendlichgroß, oder unendlichklein, dagegen können zwey conische Räume gegen einander eben so wie zwey

Winkelräume in jedem endlichen Verhältnisse stehen. Eben dieses muß daher auch von allen pyramidalischen Räumen gelten, weil sich sowol um als in jedem pyramidalischen Raum ein conischer beschreiben läßt.

§. 128.

Da im pyramidalischen Raume alle Seitenflächen Winkelflächen sind; so ist die ganze Fläche desselben so groß als alle diese Winkelflächen zusammen, und man kann also dieselbe nach §. 79. leicht finden.

§. 129.

Die Gleichung $x = nab\infty$ geometrisch zu construiren, wenn a, b, ∞ Linien bedeuten, für welche die Anzahl von Fußen, die sie enthalten, gegeben ist.

Man nehme einen cylindrischen Raum, dessen Grundfläche einen Quadratfuß enthält, zum Maaße an, beschreibe eine ebene geradlinigte Figur, welche das Rechteck aus a in b n mal d. i. nab Quadratfuß enthält, oder einen derselben gleichen Kreis, und richte auf ihr ein Prisma, oder einen Cylinder auf; so ist der zwischen seinen Seitenflächen nur nach einer Seite ohne Ende fortgehende prismatische oder cylindrische Raum $= x$. Oder macht man die Grundfläche $\frac{1}{2}nab$ Quadratfuß; so ist x der ganze nach beiden Seiten unendliche prismatische oder cylindrische Raum (§. 118.).

§. 130.

Die Gleichung $x = na\infty^2$ geometrisch zu construiren. Man richte auf der Ebene ein Loth von $\frac{na}{3,1415\ldots}$ Fuß auf, und lege durch seinen Endpunkt eine andere Ebene, die mit jener parallel ist; so ist der Parallelraum zwischen ihnen $= x$ (§. 116.).

§. 131.

Die Gleichung $x = n\infty^3$ geometrisch zu construiren, wenn n nicht größer, als $\frac{4}{3}\pi$, d. i. nicht größer, als 4,18879.... ist. Ist $n = 4,18879\ldots$; so ist x der ganze unendliche Raum (§. 109.). Ist aber $n < 4,18879\ldots$; so richte man einen Flächenwinkel von $\frac{n}{4,1887\ldots} 360°$ auf, so ist sein Raum $= x$ (§. 113.).

§. 132.

Da der prismatische und cylindrische Raum $= 2a^2\infty$ (§. 118.), der Parallelraum $= \pi a\infty^2$ (§. 116.), der Winkelraum $= \frac{n}{m} \cdot 4,1887\ldots\infty^3$ (§. 113.) und der conische Raum $= \frac{2}{3}(1-c)\pi\infty^3$ (§. 122.); so ist jeder endliche Körper gegen einen prismatischen oder cylindrischen Raum, dieser gegen einen Parallelraum, und dieser gegen einen

einen Winkelraum, oder gegen einen conischen ein Unendlichkleines der ersten Ordnung, also jeder endliche Körper gegen einen Parallelraum ein Unendlichkleines der zweiten, und gegen einen Winkelraum, oder gegen einen conischen ein Unendlichkleines der dritten Ordnung, und jeder prismatische und cylindrische Raum gegen einen Winkelraum und gegen einen conischen ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung.

§. 133.

Nunmehr ist also entschieden, daß es wirklich drey Ordnungen des absolut Unendlichgroßen, und zwar nur drey, und nicht mehrere giebt, und daß also nicht nur die Ausdrücke $b\infty$, $b\infty^2$ allgemein, sondern auch der Ausdruck $b\infty^3$, wofern b nicht größer, als $\frac{4}{3}\pi$, d. i. nicht größer, als 4, 18879 .... ist, objective Realität haben. Ob es aber auch Zwischenordnungen des Unendlichen, z. B. $\infty^{\frac{n}{m}}$, log. ∞ u. s. w. giebt, wird die höhere Meßkunst des Unendlichgroßen zeigen.

Der

Der Meßkunst des Unendlichgroßen Zweiter Abschnitt.

Anfangsgründe der höhern Meßkunst des Unendlichgroßen.

I. Von der Rectification unendlichgroßer krummen Linien.

§. 134.

Eine unendlichgroße krumme Linie AVM (Fig. 25.) zu rectificiren, wenn die Coordinaten rechtwinklicht sind. Man setze, wie gewöhnlich, die Länge der krummen Linie AVM $=$ s, AP $=$ x, PM $=$ y; so ist $s = \int. \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Da nun die Ebene, in welcher AVM liegt, ein unendlicher Kreis vom Halbmesser AD $= \infty\gamma$ ist (§. 70.); so stelle man sich vor, die unendliche Linie AVM träfe seine imaginaire Peripherie in M. Alsdenn ist AM ein Halbmesser, folglich $AM = \infty\gamma = \infty$, wenn man $\gamma = 1$ setzt, folglich ist für die unendliche Linie AVM allemal $x^2 + y^2 = \infty^2$. Hieraus ergiebt sich nun für die Rectification einer unendlichen krummen Linie folgende Regel:

1) Man

1) Man suche aus der Gleichung der krummen Linie das Integral von $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

2) Aus eben derselben substituire man in der Gleichung $x^2 + y^2 = \infty^2$ den Werth für x^2 oder y^2, je nachdem das Integral entweder x oder y enthält, und suche daraus den Werth für x oder y.

3) Diesen Werth substituire man im gefundenen Integral; so hat man die Länge s für die unendliche krumme Linie AVM.

§. 135.

Um diese Regel durch einige Beispiele zu erläutern, setze man in der Neilschen Parabel $y^3 = ax^2$ den Parameter $a = 1$; so ist hier

$$\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = s =$$
$$\tfrac{1}{27}(9y + 4)\sqrt{(9y + 4) - \tfrac{8}{27}}).$$

Da nun $y^3 = x^2$; so ist $y^3 + y^2 = \infty^2$, folglich y unendlich, mithin $y^3 + y^2 = y^3$ (1. Abth. §. 59.), folglich $y^3 = \infty^2$, also $y = \infty^{\frac{2}{3}}$. Also $s = \frac{1}{27}\left(9\infty^{\frac{2}{3}} + 4\right)\sqrt{\left(9\infty^{\frac{2}{3}} + 4\right)} - \frac{8}{27}$ $= \frac{9}{27}\infty^{\frac{2}{3}}\sqrt{9\infty^{\frac{2}{3}}} = \infty^{\frac{2}{3}} . \infty^{\frac{2}{6}} = \infty$. Also ist der unendliche Schenkel AVM so groß, als die unendliche gerade Linie AM oder AD.

§. 136.

In der Apollonischen Parabel $y^2 = ax$ ist für $a = 1$, $y^2 = x$, $s =$

$$\sqrt{x}\,(1 + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{2}{5}x^2 + \tfrac{4}{7}x^3 - \tfrac{10}{9}x^4 \ldots).$$

Nun

Nun ist $x^2 + x = \infty^2$, folglich $x^2 = \infty^2$, mithin $x = \infty$, also $s =$
$\sqrt{\infty}(1 + \frac{2}{3}\infty - \frac{2}{5}\infty^2 + \frac{4}{7}\infty^3 - \frac{10}{9}\infty^4 \ldots\ldots)$.
Da nun in dieser Reihe jedes Glied gegen die folgenden verschwindet; so ist diese Formel hier nicht brauchbar. Es ist aber auch $s =$

$$x + \frac{1}{8}lx^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{128x} \ldots\ldots, \text{ folglich } s =$$

$$\infty + \frac{1}{8}l\infty^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{128\infty} \ldots\ldots = \infty.$$ Also ist hier wiederum AVM so groß, als die unendliche Axe AD.

§. 137.

Wenn in der Hyperbel AVM (Fig. 26.) die Potenz $= e^2$, $Cp = x$, $pM = y$; so ist

$$xy = e^2, \text{ folglich } s = x - \frac{e^4}{2\cdot 3\cdot x^3} + \frac{e^8}{2\cdot 4\cdot 7\cdot x^7}$$

$$- \frac{3e^{12}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 11x^{11}} \ldots\ldots$$ Da nun $y^2 = \frac{e^4}{x^2}$, so ist für die gleichseitige Hyperbel, wo pM auf Cp senkrecht ist, $x^2 + \frac{e^4}{x^2} = \infty^2$, folglich $x = \infty$, also $s = \infty$. Also ist hier wieder AVM so groß, als die unendliche Asymptote CB.

§. 138.

Es sey in der logarithmischen Linie JCM (Fig. 27.) die Subtangente $= 1$, $AP = x$,

PM $= y$; so ist $x = ly$, und $s = y - \frac{1}{2y} + \frac{1}{24y^3} - \frac{1}{80y^5} \ldots$ Da nun $ly^2 + y^2 = \infty^2$; so ist $y = \infty$, folglich $s = \infty$. Also ist auch hier CVM so groß, als die unendliche Asymptote AD.

Dieses Beispiel ist zugleich eine vollkommene Bestätigung, daß $l\infty$ gegen ∞ verschwindet. Denn, wäre dieses nicht, so wäre hier $y < \infty$, also auch $s < \infty$, folglich wäre die unendliche krumme logarithmische Linie kleiner, als die unendliche gerade Linie AD, welches offenbar ungereimt ist.

§. 139.

Die Rectification zeigt also, daß jede von den hier berechneten unendlichen krummen Linien eben so groß ist, als eine nur nach einer Seite ohne Ende fortgehende gerade, und dieses ist auch schon für sich klar, indem sich leicht übersehen läßt, daß die unbeträchtliche Krümmung dieser Linien ihre unendliche Größe nicht vermehren kann. Ueberhaupt läßt sich ganz allgemein beweisen, daß jede krumme Linie, die von einem Punkte an nur nach einer Seite ohne Ende fortgeht, wenn sie sich auch in unzähligen Spiralgängen in der Ebene ringsum immer weiter ausbreitet, allemal $= \infty\gamma$, d. i. einer nur nach

einer Seite ohne Ende fortgehenden geraden Linie gleich ist. Denn man wickele die unendliche gerade Linie um die krumme, z. B. um die Archimedische Spirallinie; so ist offenbar, daß sie ohne Ende fort auf dieselbe passen und ihr also gleich seyn muß. Wäre dieses nicht, sondern wäre sie kleiner als die Spirallinie; so müßte es in dieser einen Punkt geben, über welchen die unendliche gerade nicht weiter hinaus gienge, d. i. einen Punkt, welcher der Endpunkt der unendlichen geraden Linie wäre, und der auch zugleich von der Spirallinie einen Theil absonderte, der schon unendlich groß wäre, und gleichwol einen Anfangs- und Endpunkt hätte. Da nun beide Folgen widersprechend sind; so ist es auch offenbar widersprechend, daß eine unendliche krumme Linie größer seyn könnte, als eine unendliche gerade. Eben so wenig aber kann sie kleiner seyn, denn, wenn man sie abwickelte und auf die gerade legte, so gilt wieder eben der vorige Schluß. Also müssen beide einander gleich seyn.

So ist denn klar, daß alle unendlichgroße Linien, die von einem Punkte aus nur nach einer Seite ohne Ende fortgehen, gleich groß sind, sie mögen krumm oder gerade seyn, und daß man also die Rectification der unendlichgroßen krummen Linien in der Meßkunst des Unendlichgroßen gänzlich entbehren kann. Indessen habe ich die Methode hiezu nicht übergehen wollen, theils um einen jeden in

den Stand zu setzen, sich auch durch die wirkliche Rectification derselben hievon zu überzeugen, theils um der Wissenschaft selbst die gehörige Vollständigkeit zu geben.

II.

Von der Quadratur unendlichgroßer krummlinigter Flächen.

§. 140.

Eine unendlichgroße krummlinigte ebene Fläche AVMDA (Fig. 25.) zu quadriren, wenn die Coordinaten AP, PM rechtwinklicht sind.

Die unendliche Fläche AVMDA ist ein Stück von der Fläche eines unendlichen Kreises, dessen Halbmesser $AD = AM = \infty y = \infty$, für $y = 1$ ist (§. 70.), und besteht daher aus der Fläche AVMP und dem halben Abschnitte PMD. Nun setze man $AP = x$, $PM = y$, den Winkel MAD $= \frac{1}{n} \cdot 360^\circ$, seinen Sinus $= s$, seinen Cosinus $= c$, und den Sinus totus $= 1$; so ist $x^2 + y^2 = \infty^2$, das geradlinigte Dreyeck $AMP = \frac{1}{2} xy$, $x = c\infty$, $y = s\infty$, folglich $AMP = \frac{1}{2} sc\infty^2$, der Sector $AMD = \frac{\pi\infty^2}{n}$ (§. 79.), folglich der halbe Abschnitt $PMD = \left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2} sc\right)\infty^2$. Nun ist ferner die Fläche

AVMP

AVMP $= \int . ydx$. Also ist die krummlinigte unendliche Fläche

$$AVMDA = \int . ydx + \left(\frac{\pi}{n} - \tfrac{1}{2} sc\right) \infty^2,$$

wo $x^2 + y^2 = \infty^2$ ist. Da nun ferner $s = \frac{y}{\infty}$, $c = \frac{x}{\infty}$ und $n = \frac{360^o}{MAD}$ ist; so ergiebt sich für die Quadratur der unendlichen Fläche AVMDA folgende Regel:

1) Man suche aus der Gleichung der Linie AVM das Integral von ydx, und setze in demselben, je nachdem es x oder y enthält, entweder $x = c\infty$, oder $y = s\infty$.

2) Aus eben derselben substituire man in der Gleichung $x^2 + y^2 = \infty^2$ den Werth für x^2 und y^2, suche daraus den Werth für x, oder y, setze alsdenn $\frac{x}{\infty} = c$, und $\frac{y}{\infty} = s$; so hat man den Werth von c und s, folglich auch die Größe des Winkels MAD, also auch den Werth von $n = \frac{360^o}{MAD}$.

3) Diese gefundenen Werthe substituire man in der Gleichung

$$AVMDA = \int . ydx + \left(\frac{\pi}{n} - \tfrac{1}{2} sc\right) \infty^2,$$

so hat man den verlangten Inhalt dieser unendlichen Fläche.

§. 141.

Die jetzt gegebene allgemeine Regel läßt sich indessen auf folgende Art sehr abkürzen:

1) Wenn man nach no. 2 findet, daß $c < 1$ oder $s > 0$ ist; so hat der Winkel MAD seine bestimmte endliche Größe. Zieht man in einer beliebigen Weite von A durch C die Linie CO mit AM parallel; so verschwindet die Parallelfläche CAMO gegen die Winkelfläche AMD (§. 77.), folglich verschwindet um so mehr der Abschnitt AVMA, der ein Theil von CAMO ist, gegen die Winkelfläche AMD. Also ist in dem Fall, da man $c < 1$, oder $s > 0$ findet, die unendliche Fläche AVMDA so groß, als die Winkelfläche AMD, folglich $= \frac{\pi \infty^2}{n}$.

2) Findet man $s = 1$, oder $c = 0$; so ist $MAD = 90^\circ$, folglich $n = 4$, mithin die unendliche Fläche $AVMDA = f. ydx + \frac{1}{4}\pi \infty^2 = \frac{1}{4}\pi \infty^2$, weil hier $x = 0$, folglich $f. ydx = 0$ ist. Also ist, wenn $s = 1$, oder $c = 0$ ist, die unendliche Fläche AVMDA so groß, als die Fläche des rechten Winkels.

3) Findet man aber $c = 1$, oder $s = 0$; so ist der Winkel $MAD = 0$, folglich $\frac{1}{n} = 0$,

 mit-

mithin PMD $= \left(\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} sc, \right) \infty^2 \frac{1}{\infty} = 0,$ folglich auch PD $= 0$, mithin AP $=$ AD, d. i. $x = \infty$. Also ist in dem Falle, da man $c = 1$, oder $s = 0$ findet $\frac{1}{2}$ die unendliche Fläche AVMDA $=$ AVMP $= \int . ydx$, wenn man $x = \infty$ setzt.

4) Wenn Cp eine Asymptote ist, die sich der krummen Linie Avm ohne Ende nähert; so wird für die unendliche Avm die Ordinate pm $= y = 0$, $x = \infty$, d. i. Cp $=$ Am, und der Winkel mAp $= 0$, folglich $\frac{1}{n} = 0$, und $s = 0$, mithin, wie no. 3, $\left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2} sc\right) \infty^2 = 0$.

Also ist jede unendliche asymptotische Fläche CAvmp $= \int . ydx$, wenn man $x = \infty$ setzt, und hier kommt es gar nicht einmal in Betrachtung, ob die Coordinaten einen rechten oder schiefen Winkel machen.

§. 142.

Um den Gebrauch dieser Regel durch einige Beispiele zu erläutern, setze man zuerst in der Apollonischen Parabel $y^2 = bx$; so ist $\int . ydx = \frac{2}{3} b^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$. Da nun hier $x^2 + bx = \frac{1}{4} \infty^2$ (§. 140. no. 2.); so ist $x^2 = \infty^2$, folglich $x = \infty$, mit-

hin $c = \frac{x}{\infty} = 1$, $s = \frac{y}{\infty} = \frac{b^{\frac{1}{2}} \infty^{\frac{1}{2}}}{\infty} = 0$ (1. Abth. §. 58.), folglich MAD $= 0$, also $\frac{1}{n} = 0$, folglich $\left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2} sc\right) \infty^2 = 0$. Also ist die unendliche Fläche der Apollonischen Parabel AVMD $= \int ydx = \frac{2}{3} b^{\frac{1}{2}} \infty^{\frac{3}{2}}$. Ich habe hier mit Fleiß die Auflösung nach der allgemeinen Regel (§. 140.) angestellt, um ihren Gebrauch zu zeigen. Weit kürzer aber kommt man zum Ziel, wenn man aus $c = \frac{x}{\infty} = 1$ so fort nach §. 141. no. 3. schließt: also ist AVMD $= \frac{2}{3} b^{\frac{1}{2}} \infty^{\frac{3}{2}}$.

Hieraus folgt also, daß die ganze unendliche Fläche der Apollonischen Parabel AMDN $= \frac{4}{3} b^{\frac{1}{2}} \infty^{\frac{3}{2}}$ ist.

§. 143.

Also verhalten sich die unendlichen Flächen zweyer Apollonischen Parabeln, wie die Quadratwurzeln ihrer Parameter, eben so wie die endlichen Flächen derselben für gleiche Abscissen. Da ferner eine Parallelfläche, welche a zur Breite hat, $= a\infty$ (§. 78.), und die Fläche eines Winkels von $\frac{1}{n} 360° = \frac{\pi\infty^2}{n}$ ist (§. 79.); so

ist

ist die unendliche Fläche der Apollonischen Parabel gegen jede Parallelfläche ein Unendlichgroßes der Ordnung $\frac{1}{2}$, gegen jede Winkelfläche aber ein Unendlichkleines der Ordnung $\frac{1}{2}$ (1. Abth. §. 66.).

§. 144.

In der allgemeinen Parabel $y^r = b^m x^n$ ist $\int. ydx = \frac{r}{r+n} . b^{\frac{m}{r}} x^{1+\frac{n}{r}}$. Da nun $y^2 = b^{\frac{2m}{r}} x^{\frac{2n}{r}}$ so ist $x^2 + b^{\frac{2m}{r}} x^{\frac{2n}{r}} = \infty^2$, folglich, weil $n < r$, $x^2 = \infty^2$, also $x = \infty$, folglich $c = \frac{x}{\infty} = 1$. Also die unendliche Fläche der halben Parabel AVMD $= \frac{r}{r+n} b^{\frac{m}{r}} \infty^{1+\frac{n}{r}}$ (§. 141. no. 3.).

Also ist überhaupt die unendliche Fläche einer jeden Parabel, in welcher $y^r = b^m x^n$ ist, ein Unendlichgroßes der Ordnung $1 + \frac{n}{r}$, und daher ist sie gegen jede Parallelfläche ein Unendlichgroßes der Ordnung $\frac{n}{r}$, aber gegen jede Winkelfläche ein Unendlichkleines der Ordnung $1 - \frac{n}{r}$,

 folg-

folglich verschwindet sie gegen jede Winkelfläche, dagegen verschwindet gegen sie wiederum eine jede Parallelfläche.

§. 145.

Daß jede Parallelfläche KNLD (Fig. 28.) gegen die unendliche parabolische Fläche AMD verschwinde, und daher gegen sie kein Verhältniß hat, ist sehr begreiflich, weil innerhalb der Fläche AMD unendlich viele Parallelflächen von der Größe KNLD Statt finden. Daß aber die unendliche parabolische Fläche auch gegen die kleinste Winkelfläche verschwinde, und gegen diese kein Verhältniß habe, wird vielleicht manchem befremdend vorkommen. Indessen kann man sich auch hievon ohne viele Mühe auf die klarste Weise überzeugen. Denn es sey AK $= x$, KN $= y$, tang. NAK $= t$, so ist $y = tx$, folglich vermöge der Gleichung der Parabel, $tx = b^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}}$, also $x = \sqrt[r-n]{\frac{b^m}{t^r}}$. Ist nun der Winkel NAK endlich; so ist auch t endlich, folglich auch $x =$ AK, also auch AN endlich, folglich schneidet der Schenkel AN eines jeden endlichen Winkels NAK die Parabel ANM in einer endlichen Weite, mithin ist seine Fläche ARD allemal größer, als die unendliche parabolische Fläche AMD, also ist diese kleiner als die kleinste Winkelfläche, und hat daher gegen eine Winkelfläche kein Verhältniß. Soll der Schen-

kel AN die Parabel AM in einer unendlichen Weite, d. i. niemals schneiden; so muß AN, folglich auch AK = x unendlichgroß seyn, also muß alsdenn t = o, folglich auch RAD = o seyn.

§. 146.

Noch genauer aber erhellet die Richtigkeit der Sache, wenn man den Inhalt der unendlichen Fläche AVMO untersucht, welche mit der parabolischen AVMD zusammen die Fläche des rechten Winkels OAD ausmacht. Es sey AQ = u, QM = z, sin. OAM = f, cos. OAM = g; so ist $f = \frac{z}{AM} = \frac{z}{\infty}$; und $g = \frac{u}{\infty}$. Da nun AQ = PM = y, und QM = AP = x ist; so ist u = y, z = x, folglich $u^r = b^m z^n$ (§. 144.), also $\int zdu = \frac{r}{r+n} b^{\frac{m}{r}} z^{1+\frac{n}{r}}$. Nun ist $u^2 = b^{\frac{2m}{r}} z^{\frac{2n}{r}}$, folglich $b^{\frac{2m}{r}} z^{\frac{2n}{r}} + z^2 = \infty^2$, folglich, weil $\frac{2n}{r} < 2$ ist, $z = \infty$, mithin f = 1, folglich OAM = 90° = OAD, also n = 4, g = o. Also ist die unendliche Fläche

$$AVMO = \frac{r}{r+n} b^{\frac{m}{r}} \infty^{1+\frac{n}{r}} + \tfrac{1}{4}\pi\infty^2$$

(§. 141. no. 2.) $= \frac{1}{4}\pi\infty^2$, d. i. so groß, als die Fläche des rechten Winkels OAD (§. 79.).

Also ist hier offenbar, daß die parabolische Fläche AVMD gegen die Fläche des rechten Winkels, mithin auch gegen jede Winkelfläche überhaupt, völlig verschwinde. Ferner ist hier zugleich augenscheinlich, daß $\infty^{1+\frac{n}{r}}$, wenn $\frac{n}{r} < 1$, nothwendig gegen ∞^2 verschwinden müsse, denn sonst würde folgen, daß die unendliche Fläche AVMO größer wäre, als $\frac{1}{4}\pi\infty^2$, d. i. größer, als die Fläche des rechten Winkels OAD, welches ungereimt ist.

§. 147.

Wenn in der gleichseitigen Hyperbel (Fig. 26.) die halbe Axe CA $= 1$, CP $= x$, PM $= y$ ist; so ist $y^2 = x^2 - 1$, und AMP $= \int ydx =$ $\frac{1}{2}x\sqrt{(x^2-1)} - \frac{1}{2}l(x+\sqrt{(x^2-1)})$. Nun ist $x^2 + x^2 - 1 = \infty^2$, folglich $x = \infty\sqrt{\frac{1}{2}}$, mithin $c = \frac{x}{\infty} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \text{cos}.\, 45^0$, folglich auch $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$, und da $\frac{1}{n}\, 360^0 = 45^0$ ist; so ist $n = 8$, folglich

$$\left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2}sc\right)\infty^2 = \frac{1}{8}\pi\infty^2 - \frac{1}{4}\infty^2,$$

und $\int ydx = \frac{1}{2}\infty\sqrt{\frac{1}{2}}\,.\,\sqrt{(\frac{1}{2}\infty^2 - 1)}$ $- \frac{1}{2}l(\infty\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{(\frac{1}{2}\infty^2 - 1)}) = \frac{1}{4}\infty^2$.

Also

Also ist die unendliche Fläche der gleichseitigen Hyperbel AMD $= \frac{1}{8}\pi \infty^2 - \frac{1}{4}\infty^2 + \frac{1}{4}\infty^2 = \frac{1}{8}\pi\infty^2$, d. i. so groß, als die Fläche des Winkels BCD von 45° (§. 79.). Ich habe hier wieder mit Fleiß die Auflösung nach der allgemeinen Regel §. 140. eingerichtet, um die Anwendung derselben desto mehr zu erläutern. Man kann aber weit kürzer zum Zweck kommen, wenn man AP $= x$, PM $= y$, die halbe Axe CA $= 1$ setzt. Alsdenn ist $y^2 = 2x + x^2$, folglich $x^2 + 2x + x^2 = \infty^2$, mithin $x = \infty\sqrt{\frac{1}{2}}$, folglich $c = \sqrt{\frac{1}{2}} = \cos. 45°$. Also ist die unendliche Fläche der gleichseitigen Hyperbel AMD so groß, als die Fläche des Winkels MAD von 45° (§. 141. no. 1.).

§. 148.

Also ist die ganze unendliche Fläche der gleichseitigen Hyperbel AMN $= \frac{1}{4}\pi\infty^2$ d. i. so groß, als die Fläche eines rechten Winkels, und nimmt man daher die beiden Hälften der gleichseitigen Hyperbel AMN und amn zusammen; so ist ihre Fläche $= \frac{1}{2}\pi\infty^2$, d. i. sie enthält die Hälfte der ganzen unendlichen Ebene, und die Zwischenfläche zwischen MAN und man enthält die andere Hälfte derselben.

§. 149.

Setzt man in der ungleichseitigen Hyperbel (Fig. 26.) AP $= x$, PM $= y$, die halbe Axe CA $= 1$, und den Parameter $= b$; so ist

y^2

$y^2 = bx + \frac{1}{2}bx^2$, folglich $x^2 + bx + \frac{1}{2}bx^2 = \infty^2$, folglich $(1 + \frac{1}{2}b)\,x^2 = \infty^2$, mithin $x = \infty\sqrt{\frac{2}{2+b}}$, also $c = \sqrt{\frac{2}{2+b}}$ = dem Cosinus des halben Asymptoten-Winkels BCD. Also ist die unendliche hyperbolische Fläche AMD so groß, als die Fläche des halben Asymptoten-Winkels BCD (§. 141. no. 1.), mithin die Fläche AMN so groß, als die Fläche des Asymptoten-Winkels BCX, folglich die unendliche Fläche, welche beide entgegengesetzte Theile der Hyperbel AMN und amn zusammen enthalten $= 2$ CBX, d. i. so groß, als die doppelte Fläche ihres Asymptoten-Winkels BCX, also die Zwischenfläche zwischen AMN und amn so groß, als die Fläche eines Winkels von $360^{\circ} - 2$ BCX.

§. 150.

Es sey die Potenz der Hyperbel $AG^2 = CG^2 = e^2$, $Gp = x$, $pM = y$; so ist $(e + x)y = e^2$, folglich $ydx = e^2\frac{dx}{e+x}$, folglich f. $ydx = e^2 l(e+x) - e^2 le$. Setzt man also $x = \infty$; so ist die unendliche asymptotische Fläche AGpM $= e^2 l\infty$ (§. 141. no. 4.).

§. 151.

Da die asymptotische Fläche der Apollonischen Hyperbel AGpM $= e^2 l\infty$, und eine Parallel-

rallelfläche, welche a zur Breite hat, $= a\infty$ ist (§. 78.); so ist die unendliche hyperbolische Fläche zwischen den Asymptoten gegen eine Parallelfläche unendlich klein, und verschwindet also gegen diese. Hievon kann man sich auch auf folgende Art sehr klar überzeugen. Man ziehe mit der Asymptote Cp so nahe als man will, eine Parallellinie JF, und setze, JF schneide die Hyperbel in M. Da nun FJ = FA; so ist FJA = FAJ = BCD, folglich FJA + FAJ = BCX. Man setze also sin. BCD = g, und sin. BCX = h; so ist $AF = \frac{g \cdot JA}{h}$, folglich wenn Cp = x, pM = y ist, $y = pM = GF = e - \frac{g \cdot JA}{h}$.

Da nun $xy = e^2$, folglich $y = \frac{e^2}{x}$; so ist

$x = \frac{he^2}{he - g \cdot JA}$, und da $e = \frac{g \cdot CA}{h}$; so ist

$x = \frac{g \cdot CA^2}{h \cdot CJ}$, folglich ist x endlich, mithin ist auch JM endlich. Also schneidet jede Parallele JF, so nahe sie auch der Asymptote Cp liegen mag, die Hyperbel AVM in einer endlichen Weite, folglich ist die unendliche asymptotische Fläche ACBM kleiner als jeder endliche Theil JCBM der Parallelfläche ACBE, mithin ist sie gegen diese, und daher gegen jede Parallelfläche

über=

überhaupt unendlich klein. Da sie aber schon gegen jede Parallelfläche verschwindet; so muß sie um so mehr gegen die Winkelfläche CBD oder AED verschwinden, und so ist zugleich klar, daß die unendliche Fläche der Hyperbel AMN der Fläche des Asymptoten Winkels gleich seyn muß.

§. 152.

In der logarithmischen Linie JCM (Fig. 27.) ist für den unendlichen Schenkel CVM, $y = \infty$ (§. 138.), folglich $s = \frac{y}{\infty} = 1$, mithin $s =$ sin. 90°, also der Winkel MAC = 90°. Also ist die unendliche asymptotische Fläche ACVMD der logarithmischen Linie CVM $= \frac{1}{4}\pi\infty^2$, d. i. so groß, als die Fläche des rechten Winkels OAD (§. 141. no. 2.); folglich (Fig. 26.) der Fläche AMN der gleichseitigen Hyperbel gleich.

§. 153.

Hieraus folgt also, daß die unendliche Fläche OCM (Fig. 27.) gegen die unendliche ACMD verschwindet. Da ferner die entgegengesetzte ohne Ende fortgehende asymptotische Fläche ACJH endlich ist, wie die Integralrechnung lehrt, so verschwindet diese gegen ACMD um so mehr. Also ist die ganze zwischen der logarithmischen Linie JCM und ihrer Asymptote HD nach beiden Seiten M, D und J, H ohne Ende fort enthaltene Fläche HJMD der Fläche des rechten Winkels

kels gleich, folglich ist die ganze unendliche Fläche, die über der logarithmischen Linie JCM liegt, ebenfalls der Fläche des rechten Winkels gleich.

§. 154.

Es sey (Fig. 27.) $CQ = u$, $QM = z$, $AC = 1$, $\cos. OCM = c$, so ist $c = \frac{u}{CM} = \frac{u}{\infty}$, $u = y - 1$, $z = x = ly$, folglich $\int. zdu = \int. xdy$. Nun setze man die Basis des logarithmischen Systems $= e$; so ist $y = e^x$, folglich $\int. xdy = \int. xde^x = e^x(x - 1) = y(ly - 1)$. Nun ist $u^2 + z^2 = CM^2 = \infty^2$, folglich $(y - 1)^2 + (ly)^2 = \infty^2$, also $y = \infty$, mithin auch $u = \infty$, folglich $c = 1$. Also ist die unendliche Exponentialfläche $COM = y(ly - 1) = \infty l \infty$ (§. 141. n. 3.).

Und so sieht man zugleich den Grund, woher COM gegen $ACMD = \frac{1}{4}\pi\infty^2$ verschwindet.

§. 155.

Also ist die unendliche Exponentialfläche COM um eine ganze Ordnung höher, als die asymptotische Fläche der Apollonischen Hyperbel, aber nicht um eine ganze Ordnung höher, als eine Parallelfläche, ob sie gleich auch gegen diese unendlichgroß ist. Denn zu jener verhält sie sich, wie $\infty : 1$ (§. 150.), zu dieser aber, wie $l\infty : 1$ (§. 78.). Dagegen verhält sie sich zur unendlichen Fläche der Apollonischen Parabel, wie $l\infty : \infty^{\frac{1}{2}}$ (§. 142.). Nun aber ist $l\infty < \infty^{\frac{1}{2}}$.

Denn

Denn es ist $\infty^{\frac{1}{2}} . \infty^{\frac{1}{2}} = \infty$, aber es kann nicht $l\infty . l\infty = \infty$ seyn, weil die Zahlen in einer geometrischen, ihre Logarithmen aber in einer arithmetischen Progression fortgehen, folglich eine sehr große Zahl und noch mehr eine unendliche ihren Logarithmum so sehr übersteigt, daß das Quadrat von diesem sie unmöglich erreichen kann. Also ist die unendliche Exponentialfläche COM gegen die unendliche Fläche der Apollonischen Parabel unendlichklein.

§. 156.

Da die unendliche Fläche der Apollonischen Hyperbel der Fläche ihres Asymptoten-Winkels gleich ist; so können die unendlichen Flächen zweyer Apollonischen Hyperbeln, eben so wie die Winkelflächen, in jedem endlichen Verhältnisse stehen.

Eben dieses gilt auch von den unendlichen Flächen zweyer Apollonischen Parabeln, weil diese sich wie die Quadratwurzeln ihrer Parameter verhalten (§. 143.), und überhaupt von den unendlichen Flächen jeder solcher zweyer Parabeln, in welchen die Coordinaten y, x einerley Exponenten haben. Denn, wenn in der einen $y^r = b^m x^n$, und in der andern $y^r = a^m x^n$ ist, so verhalten sich ihre unendlichen Flächen, wie $b^{\frac{m}{r}} : a^{\frac{m}{r}}$ (§. 144.). Wenn dagegen in der einen Parabel $y^r = b^m x^n$, und in der andern $y^c = a^u x^v$,

und $\frac{n}{r} < \frac{v}{c}$ ist; so ist die unendliche Fläche der erstern gegen die unendliche Fläche der andern unendlichklein. So ist z. B. die Parabel, in welcher $y^3 = b^2 x$ gegen die Apollonische, in welcher $y^2 = bx$, unendlichklein; denn jene ist nur von der Ordnung $1 + \frac{1}{3}$, diese aber von der Ordnung $1 + \frac{1}{2}$, dagegen ist die Apollonische Parabel gegen diejenige, in welcher $y^3 = bx^2$ ist, unendlichklein, weil diese schon von der Ordnung $1 + \frac{2}{3}$ ist.

§. 157.

Eine unendliche krumme Fläche zu quadriren, welche beschrieben wird, indem sich eine unendliche Linie CVM (Fig. 24.) dergestalt um ihre Axe CD dreht, daß die Coordinaten CP, PM immer rechtwinklicht bleiben.

Da die gedrehte unendliche ebene Fläche CVMD ein Ausschnitt eines unendlichen Kreises ist (§. 70.); so ist der durch ihre Umdrehung beschriebene conoidische Raum CVMENDM ein Ausschnitt der unendlichen Kugel. Nun aber ist die Seitenfläche eines solchen Kugelausschnitts nichts anders, als die Seitenfläche des Afterkegels CVMENM, den die Linie CVM um seine Axe CP beschreibt. Also ist die unendliche Seitenfläche des conoidischen Raums CVMENDM die Seitenfläche eines Afterkegels, in welchem die Sehne $CM = CD = \infty\gamma = \infty$ ist, wenn man $\gamma = 1$ setzt. Da nun nach der Integralrechnung

 die

die Seitenfläche eines Afterkegels, dessen erzeugende Linie CVM $= s$ gesetzt wird, $= \int 2\pi y ds$ ist; so ergiebt sich hieraus für die Quadratur der unendlichen conoidischen Flächen folgende Regel:

1) Man suche aus der gegebenen Gleichung der Linie CVM das Integral von $2\pi y ds$, d. i. von $2\pi y . \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

2) Aus eben derselben suche man in der Gleichung $x^2 + y^2 = \infty^2$ den Werth für x oder y, je nachdem das gefundene Integral x oder y enthält, und substituire denselben im gefundenen Integral; so hat man den Inhalt der unendlichen conoidischen Fläche.

§. 158.

Zur Erläuterung dieser Regel setze man im conischen Raum CMEND, wo die gedrehte unendliche Linie CM eine gerade ist, $CP = x$, $PM = y$, $\sin. tot. = 1$, $\sin. MCD = a$, und $\cos. MCD = c$; so ist $x = \frac{cy}{a}$, folglich $dx^2 = \frac{c^2 dy^2}{a^2}$, folglich $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{a^2} . dy^2} = \frac{1}{a} dy$, mithin $2 . \pi y ds = \frac{2\pi y dy}{a}$, also $\int 2\pi y ds = \frac{\pi y^2}{a}$. Nun ist $x^2 + y^2 = \infty^2$, folglich $\frac{c^2 + a^2}{a^2} . y^2 = \infty^2$,

mit-

mithin $y^2 = a^2 \infty^2$. Also ist die unendliche Fläche des conischen Raums $= a\pi\infty^2$.

Ich bin hier den allgemeinen Gang, wie es die Regel bei conoidischen Räumen erfordert, gegangen. Allein, da beim conischen Raum die gedrehte Linie $s = CM = \infty$, und $y = as$ ist; so ist $2\pi y ds = 2\pi as ds$, folglich $\int. 2\pi y ds = a\pi s^2$. Also die Fläche des conischen Raums $= a\pi\infty^2$.

§. 159.

Da nun $\pi\infty^2$ die ganze unendliche Ebene ist; so ist, wenn man diese $= P$ setzt, die Fläche des conischen Raums $= aP$, und so läßt sich dieselbe unmittelbar aus der Tafel der Sinusse bestimmen. Z. B. die Fläche des conischen Raums ist, wenn der Winkel $MCD = 30°$ ist, $= \frac{1}{2}P$, wenn $MCD = 45°$ ist, $= 0,7071 \ldots P$, wenn $MCD = 90°$ ist, $= P$.

Dieses letzte ist ganz augenscheinlich. Denn, wenn die um die Axe CD gedrehte unendliche gerade Linie CA auf jener senkrecht ist; so beschreibt sie eine ganze unendliche Ebene P.

§. 160.

Hieraus läßt sich auch umgekehrt finden, wie groß der Winkel MCD für den conischen Raum seyn muß, wenn seine Fläche $= \frac{n}{m}P$ seyn soll. Denn, man darf nur in den Tafeln den Winkel suchen, dessen Sinus $= \frac{n}{m}$ ist. Z. B. soll sie

$= \frac{3}{4}P$ seyn; so ist $\frac{n}{m} = 0,75$, also MCD $= 48^{\circ}35^{I}5^{II}$. Soll sie $\frac{1}{5}P$ seyn; so ist $\frac{n}{m} = 0,2$; also MCD $= 11^{\circ}32^{I}13^{II}$.

§. 161.

Da a den größesten möglichen Werth hat, wenn $a = 1 =$ sin. tot., folglich MCD $= 90^{\circ}$ ist; so kann die unendliche Fläche eines conischen Raums nie größer werden, als P. Also ist die größeste mögliche Fläche eines conischen Raums die Fläche desjenigen, in welchem MCD $= 90^{\circ}$ ist.

§. 162.

In der Apollonischen Parabel, in welcher $y^2 = bx$, ist ſ. $2\pi yds =$

$$\frac{1}{6}\pi(4bx + b^2)\sqrt{(4bx + b^2)} - \frac{1}{6}\pi b^2.$$

Da nun hier $x^2 + bx = \infty^2$, folglich $x = \infty$ ist; so ist die unendliche Fläche des parabolisch conoidischen Raums $= \frac{4}{3}\pi b^{\frac{3}{2}}\infty^{1+\frac{1}{2}}$.

§. 163.

Da nun die unendliche ebene Fläche der ganzen Apollonischen Parabel AVMN $= \frac{4}{3}b^{\frac{1}{2}}\infty^{1+\frac{1}{2}}$ (§. 142.); so verhält sich dieselbe zur unendlichen krummen Fläche des parabolisch conoidischen Raums, wie $1 : \pi b$. Setzt man daher $b = 1$; so ist die unendliche Fläche des parabolisch conoidischen Raums $= \pi \cdot$ AVMN $=$ 3,1415.... AVMN.

§. 164.

Für die gleichseitige Hyperbel, in welcher

$$xy = e^2,$$

folglich $y = \frac{e^2}{x}$, ist $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$

$$dx + \tfrac{1}{2}e^4\frac{dx}{x^4} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}e^8\frac{dx}{x^8}$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}e^{12}\frac{dx}{x^{12}} - \dots\dots,$$

folglich $yds = e^2\frac{dx}{x} + \tfrac{1}{2}e^6\frac{dx}{x^5} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}e^{10}\frac{dx}{x^9}$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}e^{14}\frac{dx}{x^{13}} - + \dots\dots,$$

also $\int 2\pi yds =$

$$2\pi\left(e^2lx + \frac{e^6}{8x^4} - \frac{e^{10}}{64x^8} + \frac{e^{14}}{192x^{12}} - \dots\right) + C.$$

Nun wird dieses Integral $= 0$, wenn $x = e$ wird, folglich ist

$$\text{const.} = -2\pi e^2(le + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{192} - \dots).$$

Da nun $x^2 + \frac{e^4}{x^2} = \infty^2$; so ist $x = \infty$.

Also ist die unendliche krumme Fläche, welche beschrieben wird, indem sich die gleichseitige Hyperbel um ihre Asymptote dreht, $= 2\pi e^2 l\infty$. Also verhält sie sich zu der sie erzeugenden asymptotischen ebenen Fläche, wie $2\pi : 1$, d. i. wie $6,283\dots : 1$ (§. 150.).

III.

Von der Cubatur unendlichgroßer körperlicher Räume.

§. 165.

Einen unendl. conoidischen Raum CVMENDM (Fig. 24.) zu cubiren, welcher beschrieben wird, indem sich die unendliche Linie CVM um ihre unendliche Axe CD dergestalt dreht, daß die Coordinaten CP, PM immerfort rechtwinklicht bleiben.

Da der auf diese Art beschriebene Raum ein Ausschnitt der unendlichen Kugel vom Halbmesser $CM = \infty$ ist (§. 107.); so besteht derselbe aus dem Afterkegel CVMENM, in welchem CM $= \infty$, folglich $x^2 + y^2 = \infty^2$ ist, und aus dem Kugelabschnitte MHNDM, dessen Höhe PD $= \infty - x$ ist. Nun ist der Afterkegel CVMENM $= \int \pi y^2 dx$, und der Kugelabschnitt MHNDM $= \int \pi y^2 du$, wenn man DP $= u$ setzt. Setzt man nun CD $= r$; so ist GP $= 2r - u$, und $y^2 = 2ru - u^2$, folglich $\int \pi y^2 du = \int \pi (2rudu - u^2 du) = \frac{1}{3}\pi (3r - u) u^2$. Da nun $r = \infty$, $u = \infty - x$; so ist $3r - u = 2\infty + x$, folglich $\int \pi y^2 du = \frac{1}{3}\pi (2\infty + x) \cdot (\infty^2 - 2x\infty + x^2)$, folglich ist der unendliche Kugelabschnitt MHNDM $= \frac{1}{3}\pi (2\infty^3 - 3x\infty^2 + x^3)$, und derselbe wird daher in dem Falle, wenn $x = \infty$ ist, $= 0$. Also

ist der unendliche conoidische Raum CVMENDM $= \int. \pi y^2 dx + \frac{1}{3}\pi(2\infty^3 - 3x\infty^2 + x^3)$.

Hieraus fließt also für die Cubatur der unendlichgroßen körperlichen Räume folgende Regel:

1) Man suche aus der gegebenen Gleichung der erzeugenden Linie CVM das Integral von $\pi y^2 dx$, als den Inhalt des unendlichen Afterkegels CVMENM.

2) Aus eben derselben suche man in der Gleichung $x^2 + y^2 = \infty^2$ den Werth für x oder y, je nachdem das gefundene Integral x oder y enthält, und substituire ihn in letzterm.

3) Findet man $x = \infty$; so ist schon das erhaltene Integral der verlangte Inhalt des unendlichen conoidischen Raums. Findet man aber $x < \infty$; so addire man zum gefundenen Integral noch den Kugelabschnitt

$$\frac{1}{3}\pi(2\infty^3 - 3x\infty^2 + x^3),$$

alsdenn giebt die Summe den verlangten Inhalt des unendlichen Raums.

§. 166.

Im conischen Raume CMENDM ist die erzeugende Linie CM gerade, folglich $y = \frac{bx}{a}$,

und daher $\int. \pi y^2 dx = \frac{\pi b^2 x^3}{3a^2}$. Setzt man nun

$a = x$, so ist $b = y$, also der Inhalt des Kegels CMENM $= \frac{1}{3}\pi y^2 x = \frac{1}{3}\pi(x\infty^2 - x^3)$,

 weil

weil $y^2 = \infty^2 - x^2$ ist. Addirt man nun hiezu $\frac{1}{3}\pi(2\infty^3 - 3x\infty^2 + x^3)$, so ist der ganze Inhalt des conischen Raums $= \frac{2}{3}\pi(\infty^3 - x\infty^2)$. Nun setze man sin. tot. $= 1$, cos. MCD $= c$; so ist $x = c\infty$. Also ist der Inhalt des conischen Raums $= \frac{2}{3}\pi(1 - c)\infty^3$, eben so, wie er §. 122. gefunden worden.

§. 167.

Wenn die erzeugende Linie CVM eine Parabel ist, in welcher $y^r = b^m x^n$; so ist $\pi y^2 dx = \pi b^{\frac{2m}{r}} x^{\frac{2n}{r}} dx$, also $\int. \pi y^2 dx = \frac{\pi r b^{\frac{2m}{r}} . x^{\frac{r+2n}{r}}}{r+2n}$. Nun ist hier $x = \infty$ (§. 144.). Also ist der unendliche parabolisch conoidische Raum $= \frac{\pi r b^{\frac{2m}{r}}}{r+2n} \infty^{\frac{r+2n}{r}}$. Z. B. der unendliche Raum, den die Apollonische Parabel $y^2 = bx$ beschreibt, ist $= \frac{1}{2}\pi b \infty^2$; derjenige, den die Neilsche Parabel $y^3 = bx^2$ beschreibt, $= \frac{3}{7} b^{\frac{2}{3}} \infty^{2 + \frac{1}{3}}$, u. s. w.

§. 168.

Da in der Parabel $y^r = b^m x^n$ allemal $n < r$ ist; so ist $\infty^{\frac{r+2n}{r}} < \infty^3$. Also ist jeder

unend-

unendliche parabolische Raum gegen einen conischen, imgleichen gegen den Raum eines Flächenwinkels unendlichklein. So ist z. B. der Raum, den die unendliche Apollonische Parabel durch Umdrehung um ihre Axe beschreibt, gegen einen conischen ein Unendlichkleines der Ordnung 1, und derjenige, den die Neilsche Parabel beschreibt, ein Unendlichkleines der Ordnung $\frac{2}{3}$.

Ferner, wenn in der Parabel A, $y^r = b^m x^n$, und in der Parabel B, $y^r = a^m x^n$; so verhalten sich die unendlichen Räume, welche die Parabeln A, B beschreiben, wie $b^{\frac{2m}{r}} : a^{\frac{2m}{r}}$. Sind daher die beiden Parabeln Apollonische; so verhalten sich die unendlichen Räume, die sie beschreiben, wie b : a, d. i. wie ihre Parameter. Sind es Neilsche Parabeln, so verhalten sich die unendlichen Räume, wie $b^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{2}{3}}$ u. s. w.

Wenn ferner für die eine Parabel der Bruch $\frac{n}{r}$ kleiner ist, als für die andere; so ist der unendliche Raum, den die erstere beschreibt, gegen den Raum der zweiten unendlichklein. So ist z. B. der Raum, den die Apollonische Parabel beschreibt, gegen den, welchen die Neilsche beschreibt, unendlichklein.

Endlich ist noch zu merken, daß der unendliche Raum, welchen die Apollonische Parabel

beschreibt, und der $= \frac{1}{2}\pi b \infty^2$ (§. 167.), so groß ist, als ein Parallelraum, dessen Breite $= \frac{1}{2}\pi b$ ist (§. 116.). Also sind alle unendliche parabolische Räume, in welchen für die erzeugende Parabel $\frac{n}{r} > \frac{1}{2}$ ist, wie z. B. die Neilsche, gegen jeden Parallelraum unendlichgroß.

§. 169.

Wenn sich die unendliche Apollonische Hyperbel AVM (Fig. 26.), in welcher $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$, um ihre Axe AD dreht; so ist $\int. \pi y^2 dx = \frac{1}{2}\pi bx^2 + \frac{\pi bx^3}{3a}$. Da nun hier $x^2 + bx + \frac{bx^2}{a} = \infty^2$; so ist $x = \infty \sqrt{\frac{a}{a+b}}$. Nun setze man cos. MAD $= c$; so ist, weil AM $= \infty$ ist, $x = c\infty$, folglich $c = \frac{x}{\infty} = \sqrt{\frac{a}{a+b}}$ = dem Cosinus des halben Asymptoten-Winkels BCD. Also ist $\int. \pi y^2 dx = \frac{1}{2}\pi bc^2 \infty^2 + \frac{\pi bc^3 \infty^3}{3a} = \frac{\pi bc^3 \infty^3}{3a}$, und $\frac{1}{3}\pi (2\infty^3 - 3x\infty^2 + x^3) = \frac{2}{3}\pi \infty^3 - \pi c \infty^3 + \frac{1}{3}\pi c^3 \infty^3$. Also ist der unendliche Raum, den die Apollonische Hyper-

per-

perbel durch Umdrehung um ihre Axe beschreibt,

$$= \frac{\pi b c^3 \infty^3}{3a} + \tfrac{2}{3}\pi\infty^3 - \pi c \infty^3 + \tfrac{1}{3}\pi c^3 \infty^3$$

$$= \pi\left(\tfrac{2}{3}\infty^3 - c\infty^3 + \frac{a+b}{3a} c^3 \infty^3\right).$$ Da nun $\frac{a+b}{a} = \frac{1}{c^2}$; so ist der unendliche hyperbolische Raum $= \tfrac{2}{3}\pi(1-c)\infty^3$, mithin so groß, als der conische Raum, den die Asymptote BC beschreibt, wenn sie sich um die Axe CD bewegt. Also ist, wenn man den ganzen unendlichen Raum $= S$ setzt, der Raum, den die gleichseitige Hyperbel durch Umdrehung um ihre Axe beschreibt, $= 0,195 \ldots . S$.

§. 170.

Wenn in der logarithmischen Linie CVM (Fig. 27.) die Subtangente $= a$ ist; so ist $\frac{ydx}{dy} = a$, folglich $\int. \pi y^2 dx = \int. \pi a y dy = \tfrac{1}{2}\pi a y^2 + \text{const}$. Nun sey die Basis des logarithmischen Systems $= e$; so ist $y = e^x$, folglich $\int. \pi y^2 dx = \tfrac{1}{2}\pi a e^{2x} + \text{const}$. Da nun das Integral $= 0$ wird, wenn $x = 0$ ist; so ist const. $= -\tfrac{1}{2}\pi a$, folglich $\int. \pi y^2 dx = \tfrac{1}{2}\pi a e^{2x} - \tfrac{1}{2}\pi a$. Nun ist $x = ly$, folglich $ly \cdot ly + y^2 = \infty^2$, mithin $y = \infty$, folglich $e^{2x} = \infty^2$, also $\int. \pi y^2 dx = \tfrac{1}{2}\pi a \infty^2$. Da nun

x =

$x = l\infty$; so ist ferner $\frac{1}{3}\pi(2\infty^3 - 3x\infty + x^3)$ $= \pi(\frac{2}{3}\infty^3 - \infty l\infty + \frac{1}{3}(l\infty)^3) = \frac{2}{3}\pi\infty^3$. Also ist der unendliche Raum, den die logarithmische Linie CVM beschreibt, indem sie sich um ihre Asymptote AD dreht, $= \frac{1}{2}\pi a\infty^2 + \frac{2}{3}\pi\infty^3$ $= \frac{2}{3}\pi\infty^3$, d. i. so groß, als die Hälfte des ganzen unendlichen Raums, folglich so groß als ein conischer Raum, dessen Seitenlinie mit der Axe einen rechten Winkel macht.

§. 171.

Den unendlichen Raum zu finden, den eine Linie AVM (Fig. 28.) beschreibt, indem sie sich um ihre Seite AO dreht, die auf ihrer Axe AD senkrecht ist.

Da hier die Abscisse AQ = y, und die Ordinate QM = x wird; so ist hier der Inhalt des auf diese Weise beschriebenen unendlichen Seitenraums $= \int \pi x^2 dy + \frac{1}{3}\pi(2\infty^3 - 3y\infty^2 + y^3)$.

§. 172.

Wenn AVM (Fig. 28.) eine Parabel ist, in welcher $y^r = b^m x^n$; so ist $\int \pi x^2 dy =$

$$\int \frac{n}{r}\pi b^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}+1} dx = \frac{n}{2r+n}\pi b^{\frac{m}{r}} x^{2+\frac{n}{r}}.$$

Ferner ist $\frac{1}{3}\pi(2\infty^3 - 3y\infty^2 + y^3) =$

$$\frac{1}{3}\pi\left(2\infty^3 - 3b^{\frac{m}{r}}x^{\frac{n}{r}}\infty^2 + b^{\frac{3m}{r}}x^{\frac{3n}{r}}\right).$$

Also

Also ist der unendliche Seitenraum, den die Parabel beschreibt, $= \frac{n}{2r+n} \pi b^{\frac{m}{r}} x^{2+\frac{n}{r}} +$ $\frac{1}{3}\pi \left(2\infty^3 - 3b^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}} \infty^2 + b^{\frac{3m}{r}} x^{\frac{3n}{r}}\right)$.

Nun aber ist $x = \infty$, und $\frac{n}{r} < 1$. Also ist der verlangte parabolische Seitenraum $= \frac{2}{3}\pi\infty^3$, folglich so groß als die Hälfte des ganzen unendlichen Raums, oder als der Raum, den die logarithmische Linie CVM (Fig. 27.) beschreibt, indem sie sich um ihre Asymptote AD dreht.

§. 173.

Wenn die logarithmische Linie CVM (Fig. 27.) sich um ihre Seite AO dreht; so ist hier, wenn man AC = 1 setzt, die Abscisse CQ = y − 1, und die Ordinate QM = x. Da nun hier $y = e^x$ ist; so ist $\int. \pi x^2 d(y-1) = \int. \pi x^2 e^x dx$ $= \pi e^x(x^2 - 2x + 2)$. Da ferner $y = \infty$ (§. 170.); so ist $\frac{1}{3}\pi(2\infty^3 - 3y\infty^2 + y^3)$ $= 0$, und $x = l\infty$. Also ist der unendliche Seitenraum, den die logarithmische Linie CVM beschreibt, indem sie sich um ihre Seite AO dreht, $= \pi\infty(l\infty)^2$.

§. 174.

Die gemeine Meßkunst lehrt bloß die objective Realität der drey ganzen Ordnungen des Unendlichgroßen ∞^1, ∞^2, ∞^3 (§. 133.).

Allein,

Allein, aus der höhern ist nunmehr klar, daß auch die gebrochenen $\infty^{1+\frac{n}{m}}$, $\infty^{2+\frac{n}{m}}$, imgleichen $1 \cdot \infty$, $\infty 1 \infty$, $\infty 1 \infty \cdot 1 \infty$ u. s. w. objective Bedeutung haben, indem sie sich entweder durch krummlinigte Flächen, oder durch körperliche Räume, die durch Umdrehung krummer Linien beschrieben werden, construiren lassen. Zugleich aber sieht man nun schon aus denjenigen Fällen, die in der höhern Meßkunst des Unendlichgroßen berechnet worden, in welcher Ordnung die unendlichen Flächen und körperlichen Räume nach ihrer Größe auf einander folgen, und eben hiedurch erhält die Vorstellung von der verschiedenen Natur der krummen Linien, Flächen und körperlichen Räume ihre ganze Klarheit, Deutlichkeit und Vollständigkeit.

Was die Flächen betrifft, so giebt es zuerst unzählig viele ohne Ende fortgehende Flächen, die gleichwol, weil sie immer schmäler werden, nur von endlicher Größe sind, und mit denen es daher die Beschaffenheit hat, als mit der Summe convergirender unendlicher Reihen von Zahlen, z. B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ So ist z. B. in der Hyperbel $y^m x^n = a^{m+n}$ die ohne Ende fortgehende asymptotische Fläche CAMB (Fig. 26.) $= \frac{m}{m-n} a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{m-n}{m}}$, folglich, den Fall $m = n$ d. i. die einzige Apollonische Hyperbel aus-

ausgenommen, allemal von endlicher Größe, und eben dieses gilt auch von der ohne Ende schmaler werdenden asymptotischen Fläche ACJH der logarithmischen Linie (Fig. 27.), welche dem Rechtecke aus der Subtangente in die Ordinate pm gleich ist. Allein, von denjenigen ohne Ende fortgehenden Flächen, welche in der That unendlichgroß sind, ist unter den eben jetzt berechneten die erste und kleinste die asymptotische Fläche der Hyperbel $= e^2 l \infty$ (§. 150.), und mit ihr von einerley Ordnung die Fläche, welche die Hyperbel beschreibt, indem sie sich um ihre Asymptote dreht, $= 2\pi e^2 l \infty$. Auf diese folgt die Parallelfläche $= a\infty$ (§. 78.), dann die Exponentialfläche $\infty l \infty$ (§. 154.), hierauf die Fläche $\frac{r}{r+n} b^{\frac{m}{r}} \infty^{1+\frac{n}{r}}$ aller Parabeln, die unter der Gleichung $y^r = b^m x^n$ stehen (§. 144.), und zwar in der Ordnung, wie der Bruch $\frac{n}{r}$ wächst (§. 156.), wie auch die Fläche der von ihnen beschriebenen Räume (§. 162.), auf diese die Winkelfläche $= \frac{n}{m} \pi \infty^2$ (§. 79.), imgleichen die Fläche der Hyperbel (§. 149.), der logarithmischen Linie $= \frac{1}{4} \pi \infty^2$ (§. 152.) und des conischen Raums $= a \pi \infty^2$ (§. 158.), und von diesen ist endlich die größeste mögliche die ganze unendliche Ebene $= \pi \infty^2$ (§. 71.).

Was

Was die körperlichen Räume anlangt, so ist unter den hier berechneten der kleinste der halbe cylindrische Raum $= a^2 \infty$ (§. 118.). Auf diesen folgt der Seitenraum, den die logarithmische Linie durch Umdrehung um ihre Seite beschreibt, $= \pi \infty l \infty . l \infty$ (§. 173.), dann der parabolische Raum $= \frac{\pi r b^{\frac{2m}{r}}}{r+2n} \infty^{\frac{r+2n}{r}}$, wo $\frac{2n}{r} < 1$ ist (§. 167.), dann der Parallelraum $= \pi a \infty^2$ (§. 116.), imgleichen der Raum, den die Apollonische Parabel durch Umdrehung um ihre Axe beschreibt, $= \frac{1}{2} \pi b \infty^2$ (§. 167.), hierauf der vorhin erwähnte parabolische Raum, wenn $\frac{2n}{r} > 1$ ist (§. 168.), dann der Winkelflächenraum $= \frac{n}{m} \cdot \frac{4}{3} \pi \infty^3$ (§. 113.), imgleichen der conische $= \frac{2}{3} \pi (1 - c) \infty^3$ (§. 166.), der hyperbolische und logarithmische, die durch Umdrehung um die Axe beschrieben werden (§. 169. 170.), der parabolische Seitenraum (§. 172.), und von diesen ist endlich der größeste mögliche Raum der ganze unendliche $= \frac{4}{3} \pi \infty^3$, und dieses ist zugleich das absolute Maximum alles Unendlichen, mithin aller Größe.

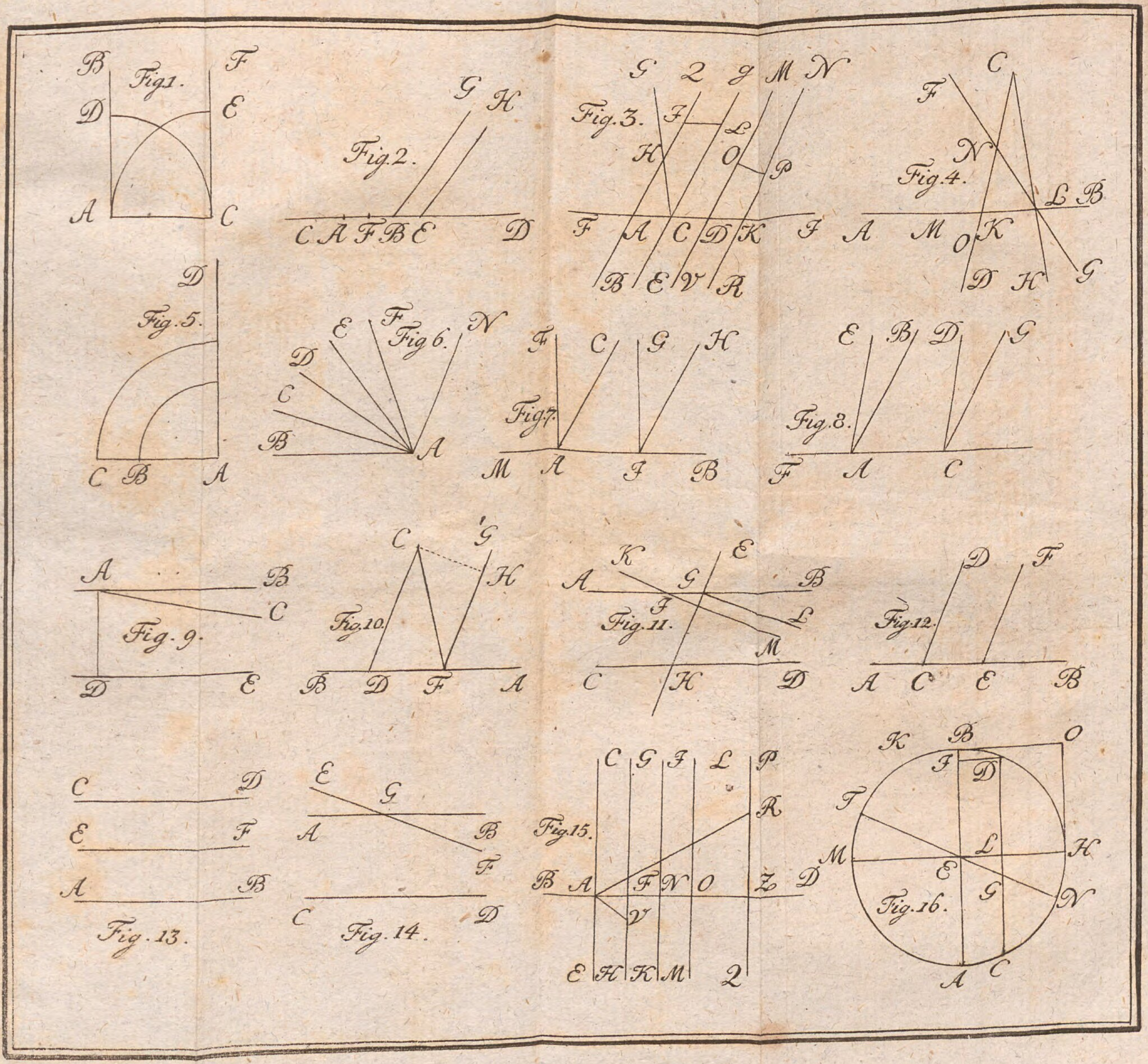
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.

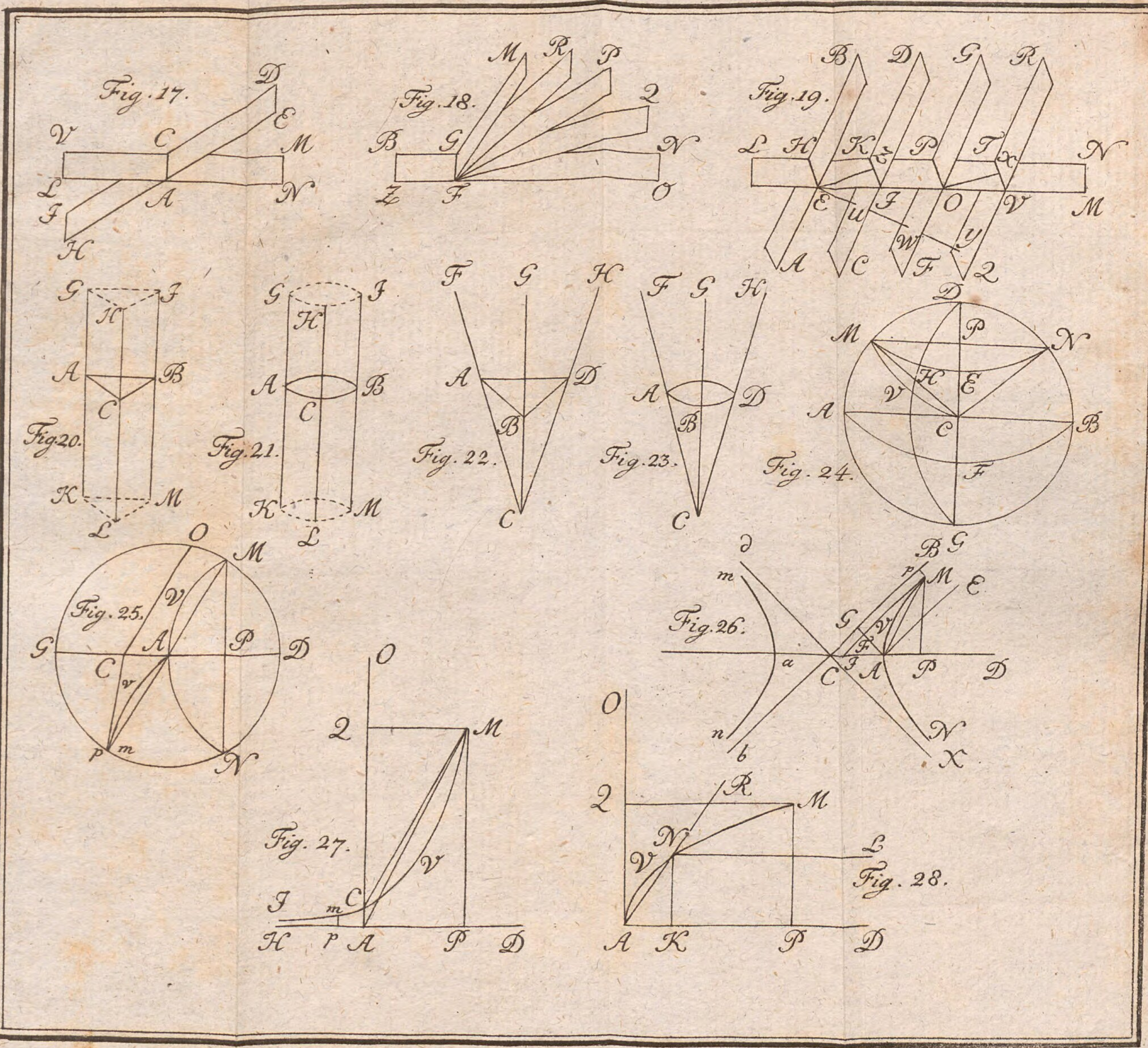
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schultz, Johann,

Versuch einer genauen Theorie des Unendlichen

Bd.: 1.

Königsberg ; Leipzig 1788

Math.p. 516 d-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082785-3
VD18 8025456X-001